

PRINCIPIOS DE ESTÁTICA Y RESISTENCIA DE MATERIALES

Equilibrio del cuerpo rígido sometido a fuerzas

Se ha visto hasta ahora que un **sistema de fuerzas** que actúan sobre un **cuerpo rígido** es equivalente a una **resultante** cuyo módulo es el de la suma vectorial de las **componentes**. La recta de acción de esa resultante debe pasar por el punto para el cual se anula la suma de los momentos de primer orden de todas las componentes.

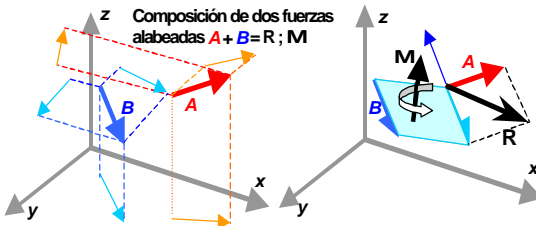
Si ese punto no puede hallarse es porque además de las fuerzas, actúa sobre el cuerpo rígido un **par de fuerzas** paralelas de igual intensidad y sentido contrario, que no es reducible a una sola fuerza: se trata de una **cupla**, caracterizada por su momento.

Para que haya **equilibrio estático** de fuerzas (sin movimiento) sobre un cuerpo rígido, deben ser **nulos** la **resultante** y el **momento** de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto del plano en el caso de fuerzas que residen en un plano (coplanares).

Otra condición de **equilibrio** equivalente a la anterior es que sean **nulos** los **momentos** resultantes de todas las acciones con respecto a **tres puntos no alineados** pertenecientes al **plano**. Se comprende que esta última condición garantiza que la resultante sea nula. En efecto, si no lo fuera y dos de los puntos cayeran sobre su recta de acción, darían momento nulo, dando la sensación de equilibrio; sin embargo, el tercero no alineado acusaría un momento no nulo, poniendo de manifiesto así una resultante distinta de cero.

Un sistema en el espacio sometido a fuerzas **no coplanares**, se puede resolver proyectando las fuerzas sobre tres planos no paralelos (por ejemplo uno (X,Z) vertical, otro (X,Y) horizontal y un tercero (X,Z) perpendicular a los otros dos, correspondientes a una vista en elevación de frente, otra en planta y una tercera en profundidad) y buscando la **resultante en cada proyección**, que serán **componentes de la resultante** en el espacio.

El equilibrio en este caso exige **resultante nula** (las tres proyecciones nulas) y **momento nulo**. Con respecto al **momento**, recordemos que es un vector, resultado del producto de la fuerza por la distancia. Ese vector es **libre**, es decir no tiene punto de aplicación ni recta de acción. Sólo dirección. En un sistema de fuerzas en el plano es perpendicular al mismo. En el caso de fuerzas en el espacio el momento es un **vector espacial**, es decir que tiene tres componentes o proyecciones una en cada uno de los ejes coordenados.



En la figura se ven dos vectores en el espacio: el rojo **A** y el azul **B**. Son **alabeados**, es decir que no se cortan. Por lo tanto no pueden tener como resultante sólo una fuerza, sino además un momento.

momento, resultado de trasladar la recta de acción de una cualquiera de las fuerzas (en el dibujo la **B**) sobre la de la otra. El momento de traslación **M** será perpendicular al plano de traslación (sombreado en celeste).

Estabilidad de sistemas cargados

Estática

La **estática** es la parte de la mecánica que plantea y resuelve las condiciones de **equilibrio en reposo** de sistemas de cuerpos en base a las **acciones** que obran sobre ellos (fuerzas y momentos). Los cuerpos que integran los sistemas en estudio no están libres en general, sino **vinculados** entre sí y con la tierra a través de diversos órganos de unión llamados **vínculos**.

Por ejemplo, para construir un **edificio** se trabaja con un **modelo gráfico** a escala del mismo y se fijan los diversos **vínculos** al terreno y eventualmente a otras estructuras. Luego se supone uno o varios **estados de carga**: peso propio, peso de personas y objetos fijos y en movimiento, empuje del viento, posible acción sísmica, etc.,. Se calculan luego las reacciones de vínculo y los esfuerzos en los elementos de la estructura necesarios para que todo el sistema esté en equilibrio. Con estos esfuerzos se dimensionan o verifican las vigas, columnas, losas, cimientos y en general elementos estructurales del edificio, de acuerdo a la resistencia característica de los materiales que se van a emplear.

Vínculos

Un **vínculo** es un órgano de unión entre cuerpos de un sistema, que impone una **limitación** característica a la posibilidad de movimiento relativo entre los cuerpos a los que se aplica.

Por ejemplo:

- **Articulación o apoyo fijo**, materializada por un perno fijo a un cuerpo dentro de un gorrón o cojinete solidario al otro o a la base del sistema. Cuerpos vinculados con articulaciones pueden girar uno con respecto al otro pero no pueden alterar la posición relativa del eje de giro. En el

- cuerpo humano, los codos, las rodillas y los tobillos son articulaciones.
- **Rótula:** cuando la articulación permite giros fuera del plano, es decir en tres dimensiones, se llama **rótula** (el fémur está articulado a la cadera por una rótula). En vez de un eje cilíndrico rodeado de una pista también cilíndrica, una rótula está materializada por una terminación esférica alojada en una cavidad también esférica)
 - **Apoyo móvil o deslizante,** que puede ser un patín fijo a un cuerpo, que se desliza por una pista plana solidaria a otro cuerpo o a la base. Este tipo de vínculo no permite giro ni desplazamiento fuera de la dirección especificada.
 - **Apoyo articulado:** es una combinación de los dos anteriores, por ejemplo el tobillo sobre un pié con un patín.
 - **Empotramiento,** que es cualquier vínculo que impida la rotación y el desplazamiento. Por ejemplo, una varilla hundida en la tierra está empotrada en ella. Dos apoyos móviles con pistas no paralelas aplicadas en el mismo punto también son un empotramiento. Un empotramiento puede considerarse como una fusión en uno sólo de los dos cuerpos a los que está aplicado.

Grados de libertad

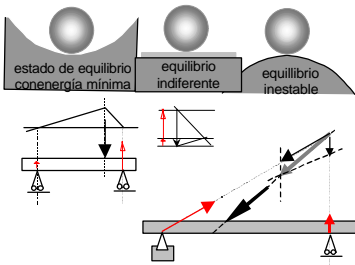
Al restringir los movimientos de los puntos del cuerpo donde están aplicados, los vínculos limitan los “**grados de libertad**” del sistema, que son los parámetros independientes necesarios para definir unívocamente la posición del sólido en el espacio. Un **cuerpo rígido en el plano** (una placa indeformable) tiene **tres** grados de libertad: dos coordenadas para un punto cualquiera y la dirección de una recta trazada sobre su superficie (medida por el ángulo que forma con alguno de los dos ejes). En el **espacio**, un cuerpo rígido tiene **seis** grados de libertad: **tres** coordenadas que definen la posición de uno de sus puntos, **dos** ángulos que definen la orientación de un eje de referencia en el espacio y un **tercer** ángulo para definir la posible rotación alrededor de ese eje¹. Al aplicar un vínculo, por ejemplo una articulación en un punto del cuerpo, fijamos su posición y restamos dos grados de libertad al sistema en el plano o tres en el espacio.

Los **vínculos** producen **reacciones** que equilibran las acciones aplicadas al sistema de fuerzas, de tal manera que la resultante entre acciones exteriores y reacciones de vínculo es **nula** cuando el sistema está en **equilibrio**. Las reacciones tienen características impuestas por el tipo de vínculo: por ejemplo, un **apoyo móvil** sólo puede generar una reacción perpendicular al plano de apoyo, y un **empotramiento** en cambio puede producir fuerzas en cualquier dirección y además absorber momentos.

¹ Para fijar la posición de un sólido en el espacio hay que definir la posición de tres puntos, lo cual da nueve coordenadas. Sin embargo, por ser indeformable, las tres distancias entre puntos son fijas, lo que reduce el número de variables a seis. Piense el lector cómo demostrar que este razonamiento es equivalente al expuesto en el texto

Sistemas isostáticos e hiperestáticos

Si la cantidad y calidad de **vínculos** impuestos al sistema restringe menos de los **grados de libertad** que éste posee, el sistema no tendrá asegurado su **equilibrio**, aunque pueda eventualmente presentar ese aspecto a través de un estado de equilibrio indiferente o inestable. Estado **indiferente** es el de una viga horizontal (tres grados de libertad) apoyada en sus extremos en sendos apoyos móviles sin rozamiento (dos grados de libertad), que puede estar en equilibrio sólo si se carga con fuerzas verticales.

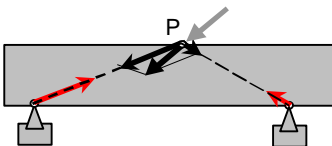


En cambio, se moverá ante fuerzas que den una resultante inclinada, ya que ninguno de los dos apoyos podrá equilibrar la componente horizontal de dicha resultante. Una **rueda libre** (tres grados de libertad) sobre un **plano horizontal**, que le restringe la coordenada vertical de su centro y la posición del punto de contacto con el plano sobre el que puede rodar, queda con un grado de libertad y también presenta equilibrio **indiferente**.

En cambio, esa rueda en la cima de una loma está en equilibrio **inestable**, ya que una mínima acción la colocará sobre un plano inclinado, que no puede absorber su peso vertical.

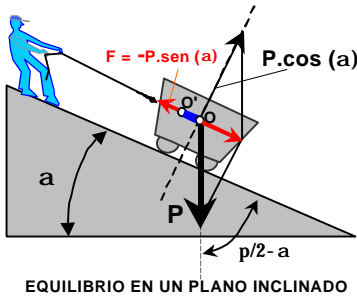
Cuando la cantidad y calidad de los vínculos impuestos a un sistema restringe exactamente su número de grados de libertad, sus reacciones equilibran las acciones imperantes en forma unívoca. Se dice que el sistema está estáticamente determinado o es **isostático**. Una viga con un apoyo móvil y otro fijo puede equilibrar la resultante de las cargas impuestas de una sola forma: con una reacción perpendicular al apoyo móvil y otra en cualquier dirección que pasa por el apoyo fijo.

Cuando un sistema está vinculado de manera sobreabundante, es decir con más restricciones que grados de libertad, se llama **hiperestático**. El caso de la viga de la figura, vinculada con dos apoyos fijos, es un sistema hiperestático cuya solución requiere que las reacciones de vínculo pasen por los dos apoyos. Hay infinitas soluciones si consideramos que la fuerza puede moverse a lo largo de la recta de acción, como se hace para el cuerpo rígido. En cambio, la solución es única cuando fijamos un punto P de aplicación de la fuerza. Esto significa que la **solución unívoca** de sistemas hiperestáticos requiere que se consideren cuerpos en los que interviene el punto



de aplicación de la fuerza, así como las **deformaciones** producidas por las mismas.

Muchos sistemas reales son **hiperestáticos**: edificios, puentes y otras estructuras sólidas y reticuladas. Por ejemplo, las vigas de los edificios, empotradas en ambos extremos a las columnas y a las vigas contiguas, tienen restringidos seis grados de libertad en el plano. La solución de tales sistemas se hace con métodos especiales de los que daremos luego algunas pautas.



EQUILIBRIO EN UN PLANO INCLINADO

Principio de los trabajos virtuales

Un sistema en equilibrio está en el estado de **energía mínima**. Por lo tanto cualquier desplazamiento hacia un lado o hacia el otro de esa posición de equilibrio significará un estado de energía mayor que la que tiene. Esa mayor energía es a costa del **trabajo** de las fuerzas exteriores aplicadas. Se comprende que en estado de energía mínima, un pequeñísimo cambio hacia

un lado o hacia el otro significará, como en el caso de la bola en la concavidad, un desplazamiento perpendicular al peso y a su reacción, es decir de trabajo nulo.

Precisamente, el principio de los **trabajos virtuales** (o infinitesimales) afirma que es nulo el trabajo de las fuerzas exteriores al sistema en equilibrio frente a un desplazamiento infinitamente pequeño y lento compatible con los vínculos.

Cada tipo de vínculo admite un tipo de desplazamiento compatible con él: por ejemplo, un apoyo móvil permite sólo un desplazamiento sobre el plano de deslizamiento del patín. Un apoyo fijo permite una rotación. Un empotramiento permite sólo una flexión manteniendo la dirección de la tangente.

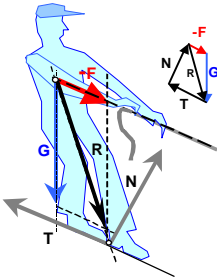
Ejemplo: Equilibrio en el plano inclinado: El peso P de la vagoneta que puede rodar sin resistencia por el plano inclinado, está equilibrado por la composición de la **reacción del plano** $|R| = |P \cos a|$ y la **fuerza de tracción** $|F| = |P \cdot \text{sen } a|$ que hace el operario Celestino a través de la sogá paralela al piso inclinado.

Aplicando el principio de los **trabajos virtuales** podemos hacer el siguiente razonamiento para averiguar al incógnita, que es el módulo de la fuerza F :

En un desplazamiento OO' muy **pequeño** y hecho muy **lentamente** sobre el plano (compatible con el vínculo) será **nula** la suma del trabajo suministrado por Celestino y el trabajo resistido por la vagoneta, que se empeña en ir cuesta abajo. Expresando ambos trabajos por los respectivos productos escalares entre fuerza y distancia, nos

queda:
 $F \cdot OO' + P \cdot OO' = 0$

Resulta que $F \cdot OO' = F \cdot OO'$ y también $P \cdot OO' = P \cdot OO' \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = P \cdot OO' \cdot \sin(\alpha)$



Entonces es $F \cdot OO' + P \cdot OO' \cdot \sin(\alpha) = 0$ de donde $F = -P \cdot \sin(\alpha)$

La aplicación del principio de los trabajos virtuales es particularmente útil en los casos en que se desea poner de manifiesto el esfuerzo resistente de un vínculo que mantiene el equilibrio.

En el caso estudiado, se debe considerar que Celestino recibe un esfuerzo de tracción $-F$ a través de la soga. Ese esfuerzo se compone con el peso G de nuestro amigo, dando una resultante R que se transmite al suelo. El excelente calzado antideslizante que usa nuestro amigo se

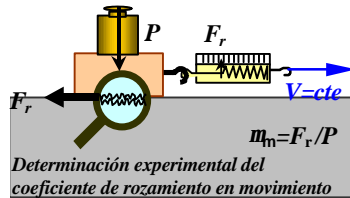
adhiera al piso con una fuerza de rozamiento T , la que compuesta con la reacción del suelo N equilibra la fuerza R ²

Rozamiento

Ya habíamos visto que el fenómeno del **rozamiento o fricción** era típico de sistemas **no conservativos**.

El motivo del rozamiento o fricción entre dos objetos puede entenderse con una **visión microscópica** del contacto entre dos cuerpos sólidos, en los que sus superficies rugosas tienden a engranarse o compenetrarse. Como resultado aparece:

- Una fuerza que se opone al deslizamiento de una superficie sobre la otra (**rozamiento de resbalamiento** o deslizamiento), o bien :
- Otra fuerza menor que se opone a que una superficie rueda sobre la otra (**rozamiento de rodadura**)



Rozamiento de deslizamiento

El fenómeno obedece a una **ley lineal**, que asigna al rozamiento una fuerza tangente F_r a la superficie de contacto que se opone al movimiento relativo lineal.

² Como se verá al tratar el tema del rozamiento, la fuerza T es proporcional a la fuerza normal N a través de un coeficiente que depende del tipo y estado de los materiales en contacto; (por ejemplo para goma seca y cemento alisado, $T/N \approx 1$)

Dicha fuerza es proporcional a la **presión P** ejercida y al área **S** de la superficie de contacto, es decir que en definitiva no depende del área sino de la fuerza normal **N**:

Entonces siendo $P=N/S$ resulta $F_r = m.P.S = m.N$, donde **m** es un coeficiente de proporcionalidad adimensional (un número sin unidad) que depende de los materiales y grado de pulimento de las superficies en contacto.

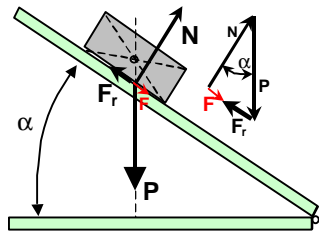
Lo dicho es válido para cuerpos **en reposo**. Cuando comienza el deslizamiento, el rozamiento cae bruscamente a una fracción del de reposo, siendo luego casi independiente de la velocidad³.

Algunos valores del coeficiente de rozamiento por deslizamiento, en reposo y movimiento.

Materiales en contacto	Condición de las superficies	m_r (reposo)	m_m (movim.)
Hierro sobre bronce	Pulidas y secas	0,2	0,15
Hierro sobre hierro	Algo engrasadas	0,3	0,13
Cuero sobre madera	Lisas y secas	0,4	0,3
Ladrillo sobre hormigón	Secas	0,7	0,6
Acero sobre hielo	húmedas	0,03	0,015

Caída por un plano inclinado

En el caso de la figura vemos un cuerpo de masa **m** que *no puede rodar*⁴ y que está apoyado sobre un plano de inclinación variable α y sometido a la gravedad **g**



Siendo **N** la reacción del plano, $P = m.g$ el peso y **Fr** la fuerza de rozamiento, el cuerpo estará sometido a una fuerza resultante **F** en la dirección del plano tal que $F = N + P + Fr$, expresión vectorial que proyectada sobre el plano da $F = P.cos(\alpha) - Fr$

Como $F_r = m.N$ y además $N = P.sen(\alpha)$, ya que la reacción del plano debe equilibrar a la componente de **P** según la normal, resulta entonces que:
 $F = P.cos(\alpha) - m.P sen(\alpha) = m.g [cos(\alpha) - \mu sen(\alpha)]$

³ Nótese que para arrastrar un mueble sobre el piso hace falta al principio una fuerza mayor que la necesaria para mantenerlo luego en movimiento.

⁴ No podrá rodar el cuerpo cuyo peso caiga dentro de su base de apoyo.

Pero la fuerza F no está equilibrada por ninguna otra, por lo que producirá una aceleración en la dirección del plano inclinado igual a:

$$a = F/m = g [\cos (\alpha) - \mu \operatorname{sen} (\alpha)]$$

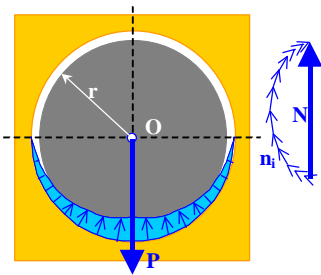
Según sea el corchete de la anterior negativo, nulo o positivo, pueden darse en teoría los tres correspondientes casos, que pasamos a interpretar:

1. $[\cos (\alpha) - \mu \operatorname{sen} (\alpha)] < 0$, de donde $\mu > \operatorname{tg} (\alpha)$ ($a < 0$)
2. $[\cos (\alpha) - \mu \operatorname{sen} (\alpha)] = 0$, de donde $\mu = \operatorname{tg} (\alpha)$ ($a = 0$)
3. $[\cos (\alpha) - \mu \operatorname{sen} (\alpha)] > 0$, de donde $\mu < \operatorname{tg} (\alpha)$ ($a > 0$)

Primer caso: Si la pendiente es menor que el coeficiente, no hay deslizamiento. En cambio NO puede concluirse que, impulsado por una acción exterior el cuerpo se frene debido a la desaceleración ($a < 0$), pues en movimiento el coeficiente μ es menor que en reposo, y la inecuación 1 debe plantearse con el coeficiente en movimiento, es decir $\mu = \mu_m$

Segundo caso: Al inclinar cada vez más el plano con el cuerpo en reposo, llegará un momento en que éste comienza a deslizarse, y en tal caso será $\mu = \operatorname{tg} (\alpha)$, pero un instante después será $\mu = \mu_m$ y se pasará al tercer caso.

Tercer caso: El cuerpo se desliza con movimiento acelerado. Disminuyendo la inclinación α podremos transformarlo en un movimiento uniforme, en cuyo caso valdrá la ecuación 2, pero con $\mu = \mu_m$



Rozamiento entre muñón y cojinete sin lubricación

Se llama **cojinete** al alojamiento cilíndrico que sirve de apoyo a un eje o muñón. Este es el caso en la mayoría de las máquinas para apoyo de sus piezas rotantes (ruedas, engranajes, bielas, cigüeñales, etc.)

La fuerza P que trasmite el eje al cojinete (que en reposo es el peso del conjunto (que en reposo es el peso del conjunto), se equilibra con la composición de las fuerzas elementales $N = \sum n_i$ normales a la superficie de contacto (en general un semicilindro). En cada elemento de la superficie de contacto aparece una fuerza elemental de rozamiento por deslizamiento $f_i = \mu \cdot n_i$ que es tangente a la superficie y cuyo momento elemental con respecto al centro de rotación O es el escalar $m_i = \mu \cdot n_i \cdot r$

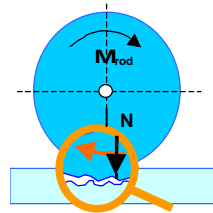
El momento resistente total \mathbf{M}_r es la suma de los escalares m_i de manera que $\mathbf{M}_r = \mu \cdot r \cdot \mathbf{S}n_i$. Pero $\mathbf{S}n_i$ es una suma de módulos representado por la longitud del arco, mayor que la suma de vectores elementales $\mathbf{N}=\sum n_i$ (ver figura). Así, el momento resistente creado por las fuerzas de rozamiento de deslizamiento en el cojinete es $\mathbf{M}_r = c \cdot m \cdot r \cdot \mathbf{P}$ donde $1 < c < p/2$ es un coeficiente que depende de la relación $\mathbf{S}n/\mathbf{P}$, que a su vez depende de la magnitud y forma⁵ del huelgo entre muñón y cojinete.

Cuando se lubrica el conjunto, introduciendo entre las superficies rozantes un líquido de viscosidad adecuada, los fenómenos de resistencia al resbalamiento ente sólidos se reemplazan por otros gobernados con leyes de hidrodinámica que se describirán al estudiar los líquidos.

Rozamiento de rodadura

En el caso de que las superficies rueden sin resbalar, el fenómeno resistente al movimiento relativo se origina en el **engrane** y desengrane de las imperfecciones, como si fueran **dientes** mal tallados⁶ de dos **engranajes** microscópicos.

Para que la rueda comience a rodar por el plano es necesario aplicar un momento $\mathbf{M}_{rod} = \varphi \cdot \mathbf{N}$, donde \mathbf{N} es la fuerza normal y φ es el coeficiente experimental de rozamiento por **rodadura**, que tiene dimensiones de longitud. Por ejemplo, para hierro sobre hierro es $\varphi = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Si las superficies se pulimentan “a espejo” se llega a coeficientes tan bajos como $\varphi = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$



Trabajo de las fuerzas de rozamiento

Las fuerzas de rozamiento no admiten un **potencial**, es decir que su valor no depende del punto de aplicación. Por lo tanto el **trabajo de rozamiento** no se transforma en energía potencial ni cinética y en cambio queda en forma de **energía interna** dentro del sistema. Recordemos que energía interna es la suma de las energías mecánicas de las partículas de la materia del sistema. En el caso del rozamiento, las fuerzas generadas trabajan contra las asperezas de las superficies donde se desarrollan. Las partículas reciben energía mecánica que transforman en **vibraciones**, **rotaciones** y otros movimientos que tienen a la temperatura como representante estadístico de conjunto. Es decir que macroscópicamente el trabajo de rozamiento eleva la temperatura de los medios materiales donde se desarrolla. Ese aumento de

⁵ El espacio inicialmente entre los dos cilindros se va modificando por el desgaste.

⁶ Entre dientes de dos engranajes bien tallados no hay “engrane” propiamente dicho sino rodadura perfecta.

temperatura generalmente termina **disipándose** en el ambiente a través de un proceso de **transmisión de calor**, que es netamente **irreversible**.

Problema:

¿Cuál será el peso mínimo P'' necesario para que comience el deslizamiento del bloque de ladrillos de peso P sobre la rampa de hormigón inclinada en un ángulo α con respecto a la horizontal?

Planteo: En la figura, el equilibrio de fuerzas lleva a plantear las siguientes ecuaciones:

$$F_r = \mu_r \cdot N = \mu_r \cdot P \cdot \cos(\alpha)$$

$$P' = P \cdot \sin(\alpha) + F_r = P \cdot [\sin(\alpha) + \mu_r \cos(\alpha)]$$

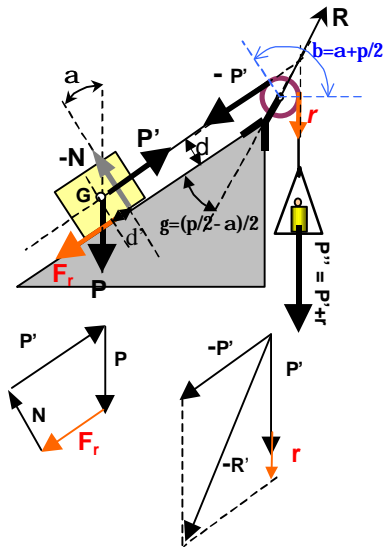
$P'' = P' + r$, siendo r la resistencia en el eje r' de la polea más el rozamiento r'' sobre la garganta distribuido en la garganta, sobre el arco $b=(a+p/2)$ de contacto entre ambas.

El rozamiento r' en el eje de la polea de radio r se gobierna por la fórmula ya vista $M_r = c \mu_r \cdot r \cdot R = r \cdot r'$ de donde $r' = c \cdot \mu_r \cdot R$

Consideraremos que el rozamiento r'' de la soga sobre la garganta de la polea es de rodadura por lo que, según lo ya visto es $M_{rod} = \varphi \cdot R = r \cdot r''$ de donde $r'' = \varphi \cdot R/r$

La fuerza de la soga P' y el peso P se suponen aplicados en el centro de gravedad G , no así la fuerza de rozamiento F_r , cuya recta de acción se ubica en el plano de deslizamiento, que es la base del bloque.

Aparece así un momento $F_r \cdot d$ que se equilibra con el corrimiento de la reacción $-N$ del plano en una distancia d' tal que $N \cdot d' = F_r \cdot d$



Solución para :

$$\alpha = 30^\circ (0,52), \quad \beta = \alpha + \pi/2 = 2,09$$

$$P = 1 \text{ Kgf} = 98 \text{ N}$$

$$\mu_r = 0,7 (\text{ladrillo/hormigón})$$

$$\mu_r = 0,2 (\text{hierro/bronce})$$

$$c = \pi/2$$

$$\varphi = 0,005 \text{ m (cáñamo/hierro)}$$

$$P' = P \cdot \sin(\alpha) + F_r = P \cdot [\sin(\alpha) + \mu_r \cos(\alpha)] = 98 \cdot [0,5 + 0,7 \cdot 0,866] = 108,41 \text{ N}$$

Como no conocemos aún R estimamos su valor para el próximo cálculo en $2P \cdot \cos(\gamma) = 2 \cdot 108,41 \cdot 0,866 = 187,67 \text{ N}$

$$r' = c \cdot \mu_r \cdot R = \pi/2 \cdot 0,2 \cdot 187,67 = 60 \text{ N}$$

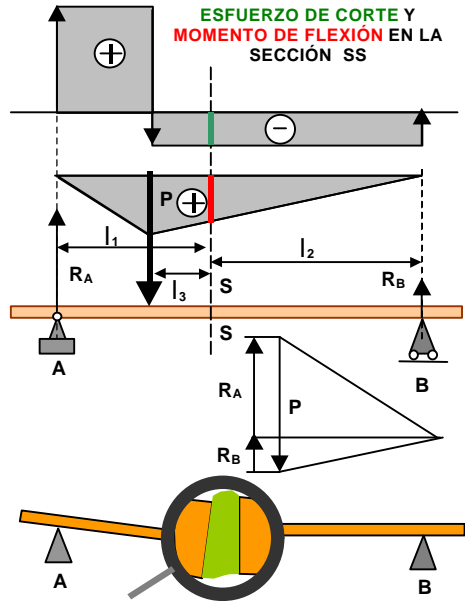
$$r'' = r' = \varphi \cdot R/p = 0,005 \cdot 187,67/0,1 = 9,38 \text{ N}$$

Respuesta : $P'' = P' + r' + r'' = 98 + 60 + 9,38 = 167,38 \text{ N}$

Equilibrio de cuerpos elásticos sometidos a esfuerzos

Sea una **viga horizontal** de peso propio despreciable apoyada en sus extremos **A** y **B** con una carga **P** concentrada en un punto **S** de la misma. La carga **P** está equilibrado por las reacciones de los apoyos **R_A** y **R_B** de acuerdo a lo que ya sabemos.

Para saber que pasa adentro del cuerpo rígido sometido a esfuerzos, en este caso la viga, imaginemos que la cortamos en una sección intermedia **SS** perpendicular a su eje. Para evitar que el equilibrio se rompa y todo se venga abajo, se podría mantener aquél trasladando todas las fuerzas a **SS**, lo que equivale a ejercer sobre la cara izquierda de la viga seccionada un **momento de traslación** $R_A \cdot l_1 - P \cdot l_3$, y sobre la cara derecha otro momento igual $R_B \cdot l_2$ (Nótese que el equilibrio de momentos exige que $R_A \cdot l_1 - P \cdot l_3 = R_B \cdot l_2$). Además sobre la cara izquierda actúan las fuerzas trasladadas $R_A - P = -R_B$, que se equilibra con $+R_B$, de la derecha.



Ahora bien: si la viga entera está en equilibrio es porque estas acciones existen en su interior antes de seccionarla, y están ejercidas por fuerzas internas análogas a la que resiste el pegamento con el que eventualmente arregláramos el supuesto corte.

Ese pegamento, que hemos representado con una masa elástica verde que une ambas partes, soporta un efecto de **flexión** que aprieta la parte de arriba y tira de la de abajo. Además soporta el esfuerzo de deslizamiento o **corte** hacia abajo de la parte izquierda y hacia arriba, de la parte derecha de la viga. (las dos partes de la viga actúan sobre la goma como las dos hojas de una tijera)

Decimos así que la sección de la viga SS está solicitada por un momento de flexión o **momento flector** (que trata de flexionarla) igual al momento de

todas las fuerzas situadas a la izquierda de la sección SS considerada (o a la derecha, con signo contrario). Además, actúa sobre ella el **esfuerzo de corte**, igual a la suma de todas las fuerzas trasladadas desde la izquierda o desde la derecha.

El **momento flector** y el **esfuerzo de corte** son las acciones principales que determinan el estado interno de tensión y deformación en los cuerpos elásticos, es decir aquellos cuerpos que, contrariamente a los rígidos, se deforman más o menos bajo las acciones exteriores, equilibrando así sus efectos.

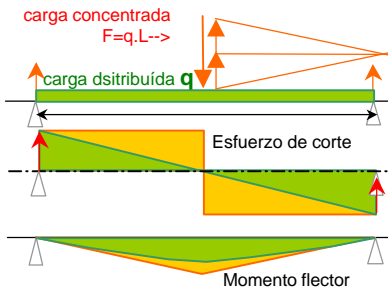
Es fácil ver que el momento flector está representado por la ordenada del **polígono funicular** y el esfuerzo de corte tiene una intensidad dada por la suma de las cargas situadas a la izquierda, llamada **función de corte**.

El esfuerzo de flexión que resiste una sección de la viga es, como ya se dijo, igual al momento de todas las fuerzas que actúan a la izquierda de dicha sección, o al momento de las de la derecha con signo opuesto, condición que exige el equilibrio propuesto para la pieza. Por convención, los ingenieros suelen tomar como positivo el momento que tiende a hacer girar la pieza en el sentido horario. Así, en caso de piezas apoyadas en sus extremos y cargadas verticalmente hacia abajo entre apoyos, el momento crece hacia la derecha desde cero en el apoyo izquierdo, donde reside una fuerza de reacción hacia arriba. Este crecimiento se mantiene hasta el punto de aplicación de la fuerza, donde el momento flector presenta un valor máximo. De allí hacia la derecha comienza a disminuir su valor hasta llegar al apoyo derecho, lugar en que llega a cero. La razón de que en los apoyos la flexión deba ser nula se comprende teniendo en cuenta que este tipo de vínculo no resiste momento. Por otra parte, el momento en cualquier sección intermedia es la suma de momentos de todas las fuerzas situadas a la izquierda. Momento es el resultado del producto escalar fuerza por distancia, igual al valor del área del rectángulo cuya altura es la fuerza y cuya base es la distancia. Esto hace que cada una de las fuerzas que vamos encontrando en nuestro viaje por la viga desde la izquierda hacia la derecha (cuya resultante vertical es el esfuerzo de corte) nos va dejando un área que se suma o se resta según que el sentido de la fuerza sea respectivamente hacia abajo o hacia arriba. De tal manera, el área entre la función de corte y el eje de la viga hasta la sección considerada representa el momento flector.

Entre los gráficos de carga, de esfuerzo de corte y de momento flector existe una relación funcional: el gráfico de momento flector da el área que encierra la función de corte desde un extremo hasta la sección considerada, por convención positiva arriba del eje de la viga y negativa abajo de éste. A su vez, el momento de corte representa el área del diagrama de cargas, es decir que es proporcional al área que delimitan las cargas con el eje de la viga hasta la sección considerada. Desde el punto de vista matemático, esto significa que la función de momento flector es la integral de la función de corte y ésta a su vez es la integral del diagrama de cargas. O lo que es equivalente, que el diagrama de cargas marca la derivada del esfuerzo de corte y éste representa la derivada o pendiente del momento flector.

Caso de cargas distribuídas

Vimos ya que una **carga concentrada** en un punto es una aproximación para una **carga distribuída** en un área muy pequeña, y que en la realidad todo esfuerzo está aplicado sobre un área finita del cuerpo solicitado. Cuando el problema se puede representar en dos dimensiones, por ser constante la tercera (caso de la profundidad de una barra o placa), se trabaja con la distribución de la carga en la dimensión en la que varía, por ejemplo la longitud. El cociente entre fuerza y superficie o entre fuerza y longitud caracteriza a una carga distribuída, y se representa respectivamente con una diagrama en tres o dos dimensiones cuyas ordenadas son ese cociente, con abscisas en el eje de la pieza solicitada.



Comparación entre **carga concentrada** y **carga dsitribuída**

En la figura, vemos a una viga de longitud **L** con una carga linealmente distribuída perpendicularmente sobre su eje, caracterizada por un valor constante **q** [Kg/m], comparada con la misma viga cargada con una fuerza equivalente concentrada en el medio, igual a **P=q.L**

Los diagramas superpuestos muestran que la carga distribuída produce esfuerzos de corte lineales, en vez de los escalonados que

crea la carga concentrada. Esto es así porque a medida que nos movemos hacia la derecha vamos sumando esfuerzos **infinitésimos graduales** o **finitos abruptos**, según sean las fuerzas respectivamente distribuídas o concentradas.

De la misma manera, el **momento flector** varía linealmente para el caso de carga concentrada, ya que el área debajo del esfuerzo de corte rectangular crece proporcionalmente a la distancia al apoyo y a la magnitud del esfuerzo de corte, que es constante hasta la sección de aplicación de una fuerza. Allí el momento flector es máximo y vale **M_{máx} = R_A.L/2 = P.L/4**

Las rectas de crecimiento y decrecimiento son en realidad las direcciones en las que el **polígono funicular** descompone a la fuerza concentrada en lo apoyos. (ver figura).

En el caso de carga distribuída, el área crece con la abscisa y con la ordenada, la que a su vez es linealmente dependiente de esa abscisa: en consecuencia la función momento flector varía con el cuadrado del área de la ordenada de corte, dando una parábola de la **mitad** de la altura que el trián-

gulo del caso de fuerzas concentradas. Los lados de este triángulo son **tangentes** a la parábola en los apoyos.

Resulta así que en caso de fuerzas distribuídas en forma constante el momento de las fuerzas que obran hasta la mitad de la viga es:

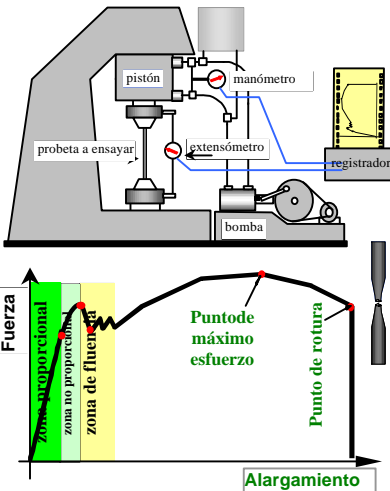
$$M_{\text{máx}} = R_A \cdot L/2 - \left\{ \int_0^{L/2} q \cdot l \cdot dl \right\} = PL/4 - qL^2/8 = P \cdot L/8$$

Deformación de la materia debida a esfuerzos

La **materia sólida** opone esfuerzos a la compresión, tracción y corte, deformándose respectivamente en forma **proporcional** a dichas acciones dentro de ciertos **límites**. Es decir que en esos límites existe un **campo potencial** de esfuerzos que transforman el trabajo de deformación en energía potencial de forma, la que se **recupera** al cesar la acción. Si se **supera** el límite de proporcionalidad, parte del trabajo produce una **deformación permanente** a través de un aumento de la **energía interna** del sistema, con la consiguiente elevación de la **temperatura** de la materia. Por último, si los esfuerzos de compresión, tracción o corte llegan más allá de las deformaciones permanentes, a ciertos **valores críticos** característicos de cada material, se produce la **rotura** del cuerpo por aplastamiento, estiramiento o desgarramiento respectivamente.

Ensayos de materiales

Si sometemos a una barra de hierro a la tracción en una **máquina de ensayos** como la representada, que va registrando el esfuerzo en función del alargamiento, obtenemos una curva como la de la figura. En ella se ve una **zona de proporcionalidad** entre esfuerzos y alargamientos, hasta que se llega a un punto en la que el material se alarga en forma no lineal.



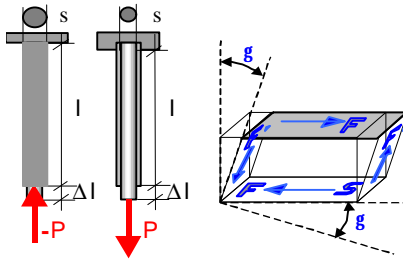
Aumentando aún más el esfuerzo, el material se estira aún sin aumentar el esfuerzo, en un estado llamado **fluencia** (de fluir). Después de haber alcanzado la fluencia, el material se **fortalece** y comienza nuevamente a presentar resistencia. Esto se prolonga hasta el punto de máximo esfuerzo, en que la sección de la barra traccionada comienza a estrecharse en una zona, y no es capaz de sostener el esfuerzo (pendiente negativa de la curva). De este estado, la barra pasa rápidamente a la rotura, que se opera en la zona en que comenzara el estrechamiento.

Ley de Hooke

Se admite que hasta el límite de proporcionalidad, los materiales se deforman de acuerdo con las siguientes leyes lineales, planteadas por primera vez por el físico inglés **Robert Hooke**, contemporáneo de Isaac Newton (1635-1703)

La ley que gobierna la compresión o tracción de una barra homogénea de sección constante **s** es:

$s = e \cdot E$ donde $s = P/s$ es el esfuerzo de compresión o tracción por unidad de superficie resistente y $e = \Delta l / l$ es la correspondiente variación relativa de



longitud. La constante de proporcionalidad **E** se llama módulo de elasticidad por compresión/tracción y su valor depende del material.

El hierro y en general los metales poseen igual resistencia a la tracción que a la compresión. En cambio muchos otros materiales resisten mejor un tipo de esfuerzo que el otro. La **madera**, por ejemplo, resiste mejor a la tracción que a la compresión. El **hormigón**, en

cambio, posee mucha mejor resistencia a la compresión que a la tracción. Esta última se desprecia en los cálculos de estructuras, colocando barras de hierro en las secciones traccionadas de los elementos (losas, vigas), que se hacen cargo de los esfuerzos correspondientes. (Fundamento del hormigón armado).

TABLA DE PARÁMETROS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

MATERIAL	S_{prop} [N/m ²]	$S_{máx}$ [N/m ²]	E [N/m ²]	t_{prop} [N/m ²]	$t_{máx}$ [N/m ²]	G [N/m ²]
Acero 0,1%C	$1,4 \times 10^8$	$3,7 \times 10^8$	$2,2 \times 10^{11}$	$1,1 \times 10^8$	$3,4 \times 10^8$	8×10^9
Bronce de Sn	$1,3 \times 10^8$	4×10^8	2×10^{11}	$1,2 \times 10^8$	$3,6 \times 10^8$	$8,2 \times 10^9$
Madera de pino⁷ compresión tracción	 $1,5 \times 10^7$	 3×10^7 6×10^7	 1×10^{10}		 6×10^6	
Hormigón compresión tracción	 5×10^6 6×10^5		 $1,5 \times 10^{10}$			

La ley que gobierna la deformación por **esfuerzo de corte** o deslizamiento de una pieza en forma de paralelepípedo es $t = g \cdot G$ donde $t = F/S$ es el esfuerzo de corte por unidad de superficie resistente desarrollado sobre las caras⁸, y g es el ángulo de deformación. La constante de proporcionalidad **G**

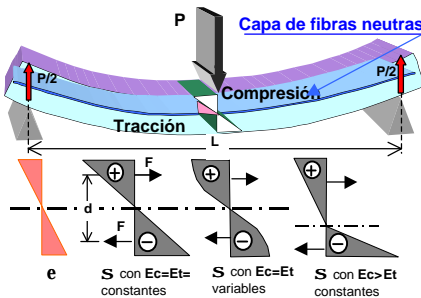
⁷ Datos con esfuerzos paralelo a las fibras del listón.

⁸ Nótese que el esfuerzo de corte τ se desarrolla tanto en las caras horizontales del paralelepípedo, como en las verticales contiguas, como lo requiere el equilibrio del

que depende del material, se llama módulo de elasticidad de deslizamiento o **módulo de torsión**, ya que el esfuerzo de torsión sobre la pieza se equilibra también por los esfuerzos de corte o deslizamiento, como se verá luego.

Flexión

La **viga** resiste al momento de flexión oponiendo un **momento equilibrante** a la flexión de acuerdo con la resistencia que opone el material de la viga de la parte inferior de la sección a estirarse y el de la parte superior a comprimirse⁹. Entre la parte **inferior estirada** y la **superior comprimida** hay una capa horizontal o una línea (según consideremos el problema en tres o dos dimensiones) sin tracción ni compresión, que mantiene la longitud original de la pieza. En esa **capa neutra** no se desarrollan esfuerzos de compresión ni tracción a lo largo de la pieza cargada. Partiendo de ella crece linealmente el acortamiento de las capas hacia el borde superior y el alargamiento de las inferiores hacia abajo.



En los gráficos se representan las tensiones y compresiones en una sección perpendicular al eje de la viga en función de la distancia a la capa neutra:

Las resultantes de los esfuerzos distribuidos en la sección se sitúan en el **baricentro** de los correspondientes **triángulos** o figuras representativas¹⁰, a cuyas áreas son proporcionales. Si sobre la viga obran sólo fuerzas perpendiculares a su eje, como es el caso de la figura, no hay esfuerzos normales a las secciones consideradas y por lo tanto las resultantes de las tensiones y compresiones son iguales en valor absoluto y de signo contrario. Esto se reconoce en que los correspondientes diagramas tienen **áreas iguales** a un lado y al otro de la capa neutra y generan un momento que equilibra el momento flector. En la sección de la mitad de la viga resulta que dicho momento vale **M = F.d = P.L/4** para una fuerza **P** concentrada en el punto medio. Ya vimos que en el caso de que esa fuerza se distribuya uniformemente a lo largo de la viga con un valor **q=P/L**, el momento flector máximo, también en el medio de la pieza, toma un valor igual a la mitad del anterior.

elemento de volumen considerado. De tal manera es $\tau = F/S = F/S'$

⁹ Se supone, como en el dibujo, una viga horizontal cargada con una fuerza vertical dirigida hacia abajo.

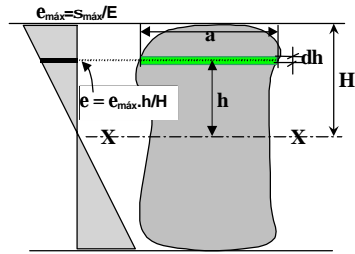
¹⁰ El centro de gravedad de un triángulo está en la intersección de las medianas, que por una propiedad geométrica está a una distancia de dos tercios de la longitud de la mediana desde el vértice correspondiente.

Dentro de los límites de proporcionalidad, y para materiales con iguales módulos de elasticidad en compresión y tracción, las tensiones correspondientes a esas deformaciones tendrán también una variación lineal con la distancia al eje neutro. En cambio, cuando se rebasa el **límite de proporcionalidad**, las tensiones crecen menos que las deformaciones, correspondiendo a este caso gráficos de tensiones no lineales. Si los **módulos** a la tracción y a la compresión son diferentes, la igualdad de áreas en los diagramas exige que la línea neutra se desplace desde el centro de gravedad de la sección hacia la zona de mayor resistencia absoluta (comprimida o traccionada, según los casos).

En el caso general de la figura en que la sección de altura total H tenga **forma cualquiera**, de ancho a variable con la altura, se verifica que el momento resistente que equilibra al momento flector resulta:

$$M = E \cdot \epsilon_{\text{máx}} \cdot J_{XX} / H, \text{ de donde}$$

$$\epsilon_{\text{máx}} = M / (EJ) \cdot H$$

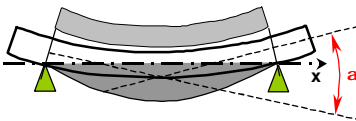


$$M = \int s \cdot a \cdot h \cdot dh = E \cdot \epsilon_{\text{máx}} / H \cdot \int a \cdot h^2 \cdot dh = S_{\text{máx}} \cdot J_{XX} / H$$

Deformación del eje de una viga sometida a flexión. Línea elástica. Flecha máxima

Dos secciones paralelas de una viga sin carga, separadas por una longitud dl, pasan a formar con la carga un ángulo da proporcional a dl tal que $da = e \cdot dl / H = M / E \cdot J \cdot dl$,

De tal manera entre dos secciones de abscisas x_1 y x_2 el ángulo que forman será $\alpha = 1/E \cdot J \int_{x_1}^{x_2} M \cdot dl$, función que es proporcional al área encerrada por la función momento flector entre x_1 y x_2



El ángulo a es proporcional al área sombreada de momentos

Si las deformaciones son pequeñas, se puede tomar el ángulo prácticamente igual a su tangente, la que a su vez coincide con el valor de la derivada, vale decir que $a \approx \text{tga} = dy/dx$, de donde la ordenada y de la viga deformada tiene como expresión en función de la abscisa x la siguiente ecuación, llamada de la **línea elástica**:

$$y(x) = 1/E \cdot J \int \int_{x_1}^{x_2} M \cdot dx \cdot dx$$

Es decir que la posición de la viga deformada sale de **integrar dos veces** la función **momento flector**. Como ésta a su vez se obtiene de integrar dos veces el **diagrama de carga**, la **línea elástica** es proporcional a integrar **cuatro veces sucesivas** la función del diagrama de carga a lo largo del eje

de la viga, entre el extremo izquierdo hasta la abscisa correspondiente a la sección en cuestión. La constante de proporcionalidad vale $1/E/J$. Cuando se integra sucesivamente, hay que tener en cuenta las **constantes de integración**, que tienen el valor de la función en el origen.

Por ejemplo, sea una viga de $L=10\text{ m}$ de longitud, de sección rectangular de ancho $b=15\text{ cm}$ y altura $h=10\text{ cm}$, de acero común (de peso específico $\rho=79000\text{ N/m}^3$ y módulo de elasticidad $E=2.10^{11}\text{ N/m}^2$), se sostiene apoyada en sus extremos.

Hallar la tensión máxima $s_{\text{máx}}$ del material y la deformación o **flecha** (así llamada por analogía con la flecha de un arco de circunferencia) en el medio de la pieza (que es la sección más comprometida).

La carga q en este caso es el peso propio de la viga por metro de longitud, o sea $q = b \cdot h \cdot \rho = 0,15 \cdot 0,1 \cdot 79000 = 1185\text{ N/m}$
 Vimos que $M=q \cdot L^2/8 = 1185 \cdot 100/8 = 14812,5\text{ N.m}$

También sabemos que $M = s_{\text{máx}} \cdot J_{xx}/(h/2)$ de donde la tensión máxima que soportará el material será $s_{\text{máx}} = M / [J_{xx}/(h/2)]$

J_{xx} es el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro, que para un rectángulo de base b y altura h vale :

$$J_{xx} = 2 \cdot b \int_0^{h/2} y^2 \cdot dy = b \cdot h^3/12 = 1,25 \cdot 10^{-5}\text{ m}^4$$

$$\text{Así es } \sigma_{\text{máx}} = M / [J_{xx}/(h/2)] = 14812,5 / (1,25 \cdot 10^{-5}) \cdot 0,05 = 59\,250\,000\text{ N/m}^2$$

El límite de proporcionalidad para el acero es de $s_{\text{prop}}=140\,000\,000\text{ N/m}^2$, de manera que el material está solicitado bastante por debajo de aquél.

De acuerdo a lo anterior, para obtener la deformación en el punto medio se debe comenzar por integrar cuatro veces la función de carga, así que:

$$\begin{aligned} I_1 \text{ (primera integral)} &= \int (q \cdot dx) = q \cdot x + c_1 \\ I_2 \text{ (segunda integral)} &= \int (I_1 \cdot dx) = (q \cdot x^2/2 + c_1 \cdot x + c_2) \\ I_3 \text{ (tercera integral)} &= \int (I_2 \cdot dx) = (q \cdot x^3/6 + c_1 \cdot x^2/2 + c_2 \cdot x + c_3) \\ I_4 \text{ (cuarta integral)} &= \int (I_3 \cdot dx) = (q \cdot x^4/24 + c_1 \cdot x^3/6 + c_2 \cdot x^2/2 + c_3 \cdot x + c_4) \end{aligned}$$

donde las constantes de integración tienen el siguiente significado:

c_1 es la carga acumulada en el apoyo ($x=0$), es decir $c_1=qL/2$

c_2 es el momento cuando $x=0$. Por el tipo de vínculo (apoyo simple) ese momento es nulo.

c_3 es el valor de la inclinación de la sección en el apoyo, que como es móvil admite una rotación igual a la mitad del ángulo $\alpha/2$ entre las secciones extremas de la pieza. Ya habíamos calculado que $\alpha(L) = 1/EJ \int_0^L M \cdot dx = 1/EJ \int_0^L (q \cdot L/2 \cdot x - q \cdot x^2/2) \cdot dx = q/EJ \cdot (L \cdot x^2/4 - x^3/6)$ de donde $c_3 = \alpha(L)/2 = q \cdot (L^3/8 - L^3/12) = q \cdot L^3/24$. Así resulta $c_3=q \cdot L^3/24$

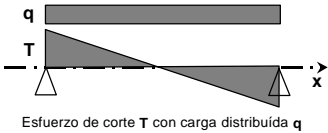
c_4 es el valor de la posición y en el apoyo, que no permite corrimiento alguno, Así que $c_4=0$

Entonces queda que la ecuación de la elástica es:

$$y(x) = q/E/J \cdot [x^4/24 - L/12 \cdot x^3 + L^3/24 \cdot x]$$

Para $x=L/2$ resulta $y(L/2) = q/E/J [L^4/384 - L^4/96 + L^4/48] = (5/384) \cdot q/E/J \cdot L^4 = 5/384 \cdot 1185 \text{ N/m} / 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 / 0.0000125 \text{ m}^4 \cdot (10\text{m})^4 = 0,062 \text{ m}$

Corte



Esfuerzo de corte T con carga distribuida q

El esfuerzo de corte se equilibra por la resistencia del material al desgarramiento en el plano de la sección considerada y también en el plano perpendicular, es decir según el eje de la pieza solicitada. Para el caso de la viga anterior, el momento de

corte cambia bruscamente de signo en la sección de aplicación de la fuerza P en caso de fuerza concentrada, siendo en cambio la variación lineal en caso de carga distribuida.

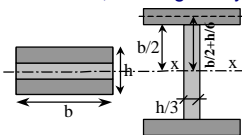
El esfuerzo de corte es digno de considerar en piezas cortas sometidas a fuerzas generalmente concentradas.

Ejemplos:

En la viga y con el estado de carga anterior, ¿Cuál es el esfuerzo de corte en la sección más comprometida?

Respuesta: las secciones que soportan el mayor esfuerzo al corte están sobre los apoyos, donde el filo de la cuchilla tiende a “cortar” el material de la viga. El esfuerzo de corte en tales secciones vale $T = q \cdot L/2/F = 1185 \text{ N/m} \cdot 10\text{m}/2/0,1\text{m}/0,15\text{m} = 395000 \text{ N/m}^2$, menor que el 1% del valor admisible (ver tabla).

En cambio, una viga muy cargada de pequeña longitud, gran momento de inercia y pequeña sección puede no verificar al corte y si a la flexión. Por ejemplo, tomemos una viga de una sección del mismo valor pero diferente forma que la anterior, de manera de tener momento de inercia mayor. Esto se logra aprovechando el mismo material distribuido en zonas más alejadas del eje de flexión xx. Se usan en la



práctica secciones en “**doble T**” como la de la figura, cuyo momento de inercia vale:

$$J_{xx} = 2(hb^3/72 + b \cdot h/3 \cdot (bh/12)^2 + b \cdot h^3/71) = 2bh \cdot [(b^2/72) + (1/432) + (h^2/71)]$$

Para $b=0,15 \text{ m}$ y $h=0,15 \text{ m}$ resulta $J_{xx} = 8,8 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ (más de siete veces el momento de inercia de la configuración anterior).

Tomemos una viga con esta sección de longitud $L=0,15\text{m}$ con una carga concentrada **P=3000000 N** aplicada en el medio.

Será $M = P \cdot L/4 = 112500 \text{ Nm}$

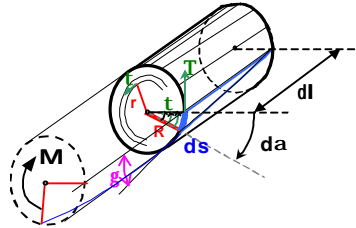
$$\sigma_{\text{máx}} = M / [J_{xx}/(h/2)] = 112500 / (8,8 \cdot 10^{-5}) \cdot (0,15/2 + 0,1/3) / 0,05 = 1,38 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \approx \sigma_{\text{adm}} = 1,40 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

$$T = P/2/F = 3000000 \text{ N/m} / 2 / 0,015\text{m}^2 = 10^8 \text{ N/m}^2 \approx \tau_{\text{adm}}$$

Es decir que la pieza está prácticamente trabajando al límite de proporcionalidad tanto en tracción como en corte.

Torsión

En la figura se ve un elemento de longitud **dl** de una barra cilíndrica de longitud total **L** y radio **R**, empotrada en un extremo y sometida en el otro a un momento **M**. La torsión produce una deformación que transforma una generatriz del cilindro en una hélice. El ángulo γ entre ambas caracteriza esa deformación, que vale $g = ds/dl = R \cdot da/dl = R \cdot a/L$, siendo **a** el ángulo que gira el extremo de la barra opuesto al empotramiento. La deformación es resistida por los esfuerzos de corte **t** que se desarrollan en la sección, y que van creciendo desde el centro ($r=0$) hasta el borde ($r=R$) de tal manera que $t=T/R \cdot r$, para $T=G \cdot g = G \cdot R \cdot a/L$.



Se cumple así que el momento resistido en cada sección de la pieza vale la integral de los momentos elementales:

$$M = \int 2\pi r \cdot t \cdot dr = 2\pi T/R \int r^3 dr = 2\pi T/R \cdot R^4/4 = \pi T/2 R^3 = [p \cdot G \cdot R^4/2/L] \cdot a$$

y resulta que el momento es función del ángulo **a** que gira el extremo. La constante de proporcionalidad que figura entre corchetes contiene el momento de inercia de la sección con respecto al eje de rotación, que ya vimos que vale $J_0 = p/2 \cdot R^4$ de donde $M = [J_0 \cdot G/L] \cdot a$

Ejemplo:

Una varilla cilíndrica de hierro de $R=3$ cm de radio y $L=6$ m de longitud, empotrada en un extremo y libre en el otro, se torsiona allí hasta la rotura. ¿Cuántas vueltas se habrá retorcido su extremo libre?

Respuesta: Si la varilla se ha roto es porque ha llegado al límite de esfuerzo de corte del material $t_{max} = 3,4 \times 10^8$ N/m²

Como vimos es $T=G \cdot g = G \cdot R \cdot a/L = 8 \cdot 10^9 \cdot 0,03 \cdot a/6 = 3,4 \times 10^8$ N/m² de donde $a = 6 \cdot 3,4 \cdot 10^9 / 0,03 / 8 \cdot 10^9 = 8,5$ radianes = 1,35 vueltas

Discusión del resultado: El número 1,35 sale de considerar un modelo lineal, pero la rotura se alcanza fuera del intervalo de proporcionalidad, así que el número de vueltas que realmente corresponden para alcanzar tal estado es **necesariamente mayor**.

MECÁNICA DE LOS FLUÍDOS

Fluídos

Generalidades

A diferencia de los sólidos, los fluídos son sustancias que carecen de energía potencial de forma, es decir que no se necesita efectuar trabajo para cambiar su forma mientras no haya cambio de volumen (compresión o expansión), y siempre que el cambio de forma se realice de manera suficientemente lenta¹¹.

Son fluídos los líquidos y los gases, sustancias que por su estructura no presentan resistencia a los esfuerzos de corte. La diferencia fundamental entre el estado líquido y el gaseoso reside en que entre las moléculas de un gas existen fuerzas de atracción, llamadas de cohesión, que tiende a mantenerlas unidas (formación de gotas, fenómenos de adherencia). Los gases en cambio no presentan fuerzas de atracción o cohesión entre sus moléculas, tendiendo a expandirse hasta los límites del recipiente que los contiene.

En vez del fenómeno de corte, los fluídos presentan el fenómeno viscoso, que se manifiesta por la propiedad de arrastrar en su movimiento a porciones vecinas. Se reconoce y cuantifica este fenómeno con un parámetro llamado viscosidad, igual a la fuerza tangencial por unidad de superficie entre dos capas que se deslizan a velocidades diferentes separadas por cierta distancia. La viscosidad se manifiesta tanto en líquidos como en gases, caracterizando sobre todo la movilidad y el escurrimiento del fluído. (Compárese melaza con agua).

Para estudiar los fenómenos en los que intervienen fluídos, se emplean modelos de fluídos ideales, que al igual que en el caso de los sólidos, poseen propiedades ideales que simplifican el estudio. Por ejemplo, se recordará que el cuerpo rígido es una idealización de un cuerpo real casi indeformable. También así se consideran según los casos, líquidos incompresibles, sin viscosidad, o gases ideales, todos ellos entelequias a las que se aproximan los fluídos reales en ciertas condiciones límite.

La mecánica de los fluídos se divide en dos partes: la que estudia los fluídos

¹¹ Aunque no retenga energía potencial, el cambio de forma de un fluído con una evolución que no sea extremadamente lenta significa la aparición de fuerzas de inercia y de rozamiento que aumentan la energía interna del mismo.

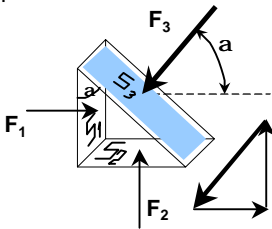
en reposo o **hidrostática** y la que trata con fluidos en movimiento, o **hidrodinámica** ¹²

Hidrostática

Presión en un punto de una masa fluída

La hidrostática considera a los fluidos como continuos, sin atender a que en realidad están formados por partículas. Para que una porción de fluido esté en equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él deben dar resultante nula. Así, considerando una porción de fluido en el seno de una masa en equilibrio limitada por un pequeño poliedro, se deduce de tal condición que el cociente entre fuerza y área de cada cara deba ser igual.

A este cociente $P=F/S$ se lo llama presión, y de la condición de equilibrio se deduce que es independiente de la orientación de la cara, es decir que se puede representar en los fluidos por una magnitud escalar dependiente del punto considerado.



Por ejemplo, en el prisma de la figura, que delimita una porción de fluido en equilibrio, se cumplirá que la suma de las proyecciones horizontales y verticales de las fuerzas actuantes debe ser nula.

Considerando las proyecciones horizontales es:

$$F_1 - F_3 \cdot \cos(\alpha) = 0 \text{ de donde}$$

$$P_1 \cdot S_1 = P_3 \cdot S_3 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{Pero } S_3 \cdot \cos(\alpha) = S_1, \text{ de donde } P_3 = P_1$$

Con idéntico razonamiento se deduce para la proyecciones horizontales que:

$$F_2 - F_3 \cdot \sin(\alpha) = 0 \text{ y entonces } P_3 \cdot S_3 \cdot \sin(\alpha) = P_2 \cdot S_2, \text{ y como } S_3 \cdot \sin(\alpha) = S_2 \text{ resulta que } P_3 = P_2. \text{ Queda demostrado así que } P_1 = P_2 = P_3$$

Cuestión: En los sólidos la fuerza por unidad de superficie no puede representarse por un escalar, ya que depende de la orientación de la superficie. Por ejemplo, en una barra comprimida según su eje, la tensión es máxima según aquél y nula en la dirección perpendicular. Resulta así que en los sólidos, la tensión ni siquiera es representable por un vector de dirección normal a la superficie considerada, sino en general lo es por una función vectorial dependiente de la dirección llamada "tensor". Así como los **vectores** tienen componentes **escalares**, los **tensores** son magnitudes cuyas componentes son **vectores**.

Teorema general de la hidrostática

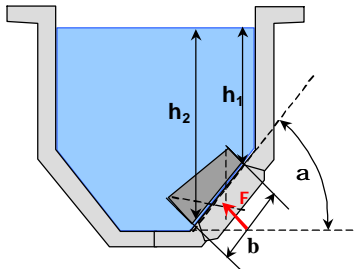
Reza este principio que la diferencia de presión entre dos puntos de un líquido

¹² En rigor debería hablarse de hidrostática e hidrodinámica para líquidos y neomostática y neumodinámica para gases. Sin embargo esta división no se usa, englobando en los primeros dos términos a líquidos y gases.

do en equilibrio sometido a la gravedad es igual a la diferencia de altura multiplicada por el peso específico. Vimos ya que el peso específico r de una sustancia es el cociente (escalar) entre el peso P y el volumen ocupado V , vale decir que es la densidad d multiplicada por la gravedad g . Así entonces $r=d.g$

Demostración: considérese dentro de la masa de líquido en equilibrio una porción cilíndrica vertical de base b y altura h . Si el contenido del tubo está en equilibrio es porque su peso P , que vale $P=b.h.r$ se equilibra con una fuerza neta hacia arriba F , que proviene de la diferencia de presión entre el extremo inferior p_i y el superior p_s , e igual a $F=b.(p_i-p_s)$. De la igualdad $b.(p_i-p_s) = b.h.r$ surge que $p_i-p_s = h.r$

Cuestión: Lo anterior es cierto si el peso específico es constante y en particular no depende de la presión (o la altura), es decir cuando el fluido no cambia de volumen con acciones exteriores. Se dice de un fluido tal que es **incompresible**. La incompresibilidad absoluta no se da en los líquidos reales, los que en pequeña medida aumentan su densidad con la presión. Sin embargo, en la mayoría de los casos, en los que estén en juego presiones moderadas, los líquidos corrientes pueden suponerse incompresibles. La razón entre variación de volumen y de presión $-dv/dp$ se llama coeficiente de compresibilidad. Los gases, al contrario que los líquidos, son muy compresibles. El coeficiente de compresibilidad de los gases es proporcional a la temperatura e inversamente proporcional al cuadrado de la presión, como se verá más adelante.



Ejemplo: calcular la fuerza F con que debe sujetarse la tapa rectangular de lados a y b del tanque de agua de la figura.

Solución: la presión sobre la tapa va desde un valor $p_s=h_1.r$ en su parte superior hasta un valor $p_i=h_2.r$ en su parte más baja. Sobre la tapa actúa una carga trapezoidal, cuyo centro de gravedad está más cerca de la parte inferior (centro de presión). Allí debe aplicarse una fuerza

igual a $F=p_m.S$, donde $p_m=(p_s+p_i)/2$ es la presión media que soporta y $S=a.b$ es el área de la tapa.

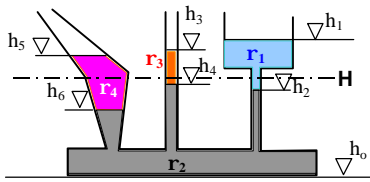
$$\text{Resulta así } F = p_m.S = r.[(h_1+h_2)/2].a.b = r.[h_1+b/2.\text{sen}(a)].a.b$$

Para $a=1\text{ m}$, $b=2\text{ m}$, $h_1=3\text{ m}$, $a=45^\circ$, $\rho_{\text{agua}}=9800\text{ N/m}^3$ es
 $F= 9800\text{ N/m}^3 \cdot (3+\sqrt{3}/4).2\text{ m}^3 = 67287\text{ N}$

Vasos comunicantes

El nivel superior o nivel de la superficie libre de líquido en una serie de vasos comunicados es el mismo si se llenan con un mismo líquido. Con líquidos de diferente densidad y no miscibles, los niveles en cada vaso se pueden calcular aplicando el teorema general de la hidrostática a cada porción o columna líquida.

Sea por ejemplo el sistema de tres vasos comunicantes de la figura, inicialmente lleno de mercurio ($\rho_2=13$) hasta un nivel H , al que luego se agregan otros líquidos: agua ($\rho_1=1$) en el vaso de la derecha, aceite ($\rho_3=0,8$) en el vaso del medio y sulfuro de carbono ($\rho_4=2$) en el vaso de la izquierda. A



consecuencia del agregado de estos líquidos sobre el mercurio se llega a valores de la superficie libre a niveles h_1 , h_3 y h_5 respectivamente, y consecuentemente cambian los niveles de las correspondientes interfaces inicialmente en H hasta h_2 , h_4 y h_6 respectivamente.

Suponiendo que la superficie libre de todos los líquidos está a la misma presión (la atmosférica), el equilibrio en los vasos comunicantes de la figura exige que $p_1=p_3=p_5$, y entonces, recorriendo el sistema entre superficies libres puede plantearse para las presiones a las respectivas alturas que:

$$(p_1-p_2)+(p_2-p_4)+(p_4-p_3) = 0 \tag{1}$$

$$\text{También es } p_1-p_2 = \rho_1 \cdot (h_1-h_2) ; p_2-p_4 = \rho_2 \cdot (h_2-h_4) ; p_4-p_3 = \rho_3 \cdot (h_4-h_3) \tag{2}$$

$$\text{Entonces de [1] y [2] queda} \\ \rho_1 \cdot (h_1-h_2) + \rho_2 \cdot (h_2-h_4) + \rho_3 \cdot (h_4-h_3) = 0 \tag{3}$$

Yendo desde la superficie libre del tubo del medio hasta la superficie libre del vaso de la izquierda es:

$$(p_3-p_4)+(p_4-p_6)+(p_6-p_5) = 0 \tag{4}$$

$$\rho_3 \cdot (h_3-h_4) + \rho_2 \cdot (h_4-h_6) + \rho_4 \cdot (h_6-h_5) = 0 \tag{5}$$

Las [3] y [5] permiten determinar los niveles de equilibrio a partir de los siguientes datos:

Las densidades de los líquidos relativas al agua son : $\rho_1=1$ (agua), $\rho_2=13$ (mercurio), $\rho_3=0,8$ (aceite) y $\rho_4=2$ (sulfuro de carbono)

Las cantidades agregadas de cada líquido son tales que de acuerdo a la forma y dimensiones del vaso correspondiente, producen las siguientes diferencias de niveles: $(h_1-h_2) = 10$ cm, $(h_3-h_4)= 3$ cm y $(h_5-h_6)= 8$ cm

Quedan pues como incógnitas las diferencias (h_2-h_4) y (h_4-h_6) , que se deducen de las ecuaciones siguientes:

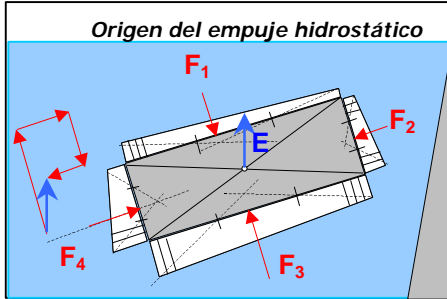
$$1 \times 10 + 13 \cdot (h_2-h_4) - 0,8 \cdot (3) = 0 \quad \text{de donde } h_2-h_4 = (2,4-10)/13 = -0,585$$

$$0,8 \cdot (3) + 13 \cdot (h_4-h_6) + 2 \cdot (-8) = 0 \quad \text{de donde } h_4-h_6 = (16-2,4)/13 = 1,046$$

Tomando como valor de referencia $h_2=0$ es $h_1=10$, $h_3=3,585$, $h_4=0,585$, $h_5=7,539$, $h_6=-0,461$

Principio de Arquímedes

Los cuerpos sumergidos en un líquido en equilibrio reciben un empuje vertical hacia arriba igual al peso del volumen desalojado. Este aserto, debido al matemático y físico **Arquímedes de Siracusa** (Sicilia) 290-280 AC , se puede entender considerando que la presión hidrostática sobre la superficie del cuerpo sumergido tiene una resultante no nula, ya que aumenta con la profundidad de la región considerada.



Por ejemplo, sobre un cuerpo cualquiera podemos trazar diagramas de presiones sobre sus paredes, que nos muestran cómo es el empuje total.

Sin hacer ningún cálculo, sólo con una experiencia mental, podemos darnos cuenta que la resultante de todas las presiones sobre un cuerpo dentro de un fluido debe ser una fuerza vertical contraria al peso del medio desalojado, que actúa en el centro de gravedad de la parte sumergida. En efecto, imaginando a ésta sustituida por una igual porción de líquido, se tendrá una masa fluida en equilibrio. Tal estado puede interpretarse como resultante nula entre peso del líquido y empuje sobre el volumen considerado. Resultan así que ambas son fuerzas de igual valor y sentido contrario.

Cuerpos flotantes

Para un cuerpo en el seno de un líquido se pueden dar tres posibilidades:

- La densidad del cuerpo es mayor que la del líquido: en este caso el cuerpo se hunde, pues el empuje es menor que el peso.
- La densidad del cuerpo es igual a la del líquido: en este caso el cuerpo se mantiene en el seno del líquido ya que el empuje equilibra al peso.
- La densidad del cuerpo es menor que la del líquido: el cuerpo no está en equilibrio en el seno del líquido ya que sobre él actúa una resultante hacia arriba. El equilibrio se alcanza cuando sólo una parte del cuerpo está sumergida, igualando su empuje al peso. El cuerpo flota en la superficie.

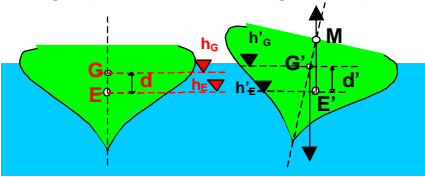
Lo dicho vale para cuerpos homogéneos o no. En este último caso, se debe tomar la densidad promedio del cuerpo.

Estabilidad de cuerpos flotantes - Metacentro

Un cuerpo que flota en un líquido está en equilibrio si el centro de gravedad y el centro de empuje determinan una vertical.

Ese equilibrio será estable si un pequeño desplazamiento que aparte al

cuerpo de esa posición conduce a un sistema cuerpo/líquido con mayor energía potencial. Eso significa que el sistema estaba antes del desplazamiento en un estado de energía mínima, que caracteriza a la condición de equilibrio.



En el caso del barco de la figura, cuando una acción exterior¹³ hace rotar el casco en sentido horario,

el baricentro **G** se desplaza un poco hacia la derecha hasta **G'**, pero menos que el centro de empuje **E**, que lo hace en mayor grado también a la derecha, hasta la posición **E'**. Como consecuencia, el empuje y el peso (que tienen igual intensidad) producen una cupla en sentido antihorario que tiende a volver al casco a su posición anterior. Un pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio lleva a que la recta de la fuerza de empuje corte al eje de simetría del casco en un punto **M**, llamado **metacentro**, que debe estar por encima del baricentro para que el equilibrio sea estable

Visto desde otro punto de vista, el de la variación de energía potencial del sistema, el estudio de las condiciones de equilibrio de los cuerpos flotantes lleva consideraciones equivalentes:

La rotación hace que el baricentro **G** cambie de nivel de h_G a h'_G , variando la energía potencial del sólido. Pero al mismo tiempo, la posición del centro de empuje **E** también cambia de nivel, desde h_E a h'_E . Que el trabajo de las fuerzas exteriores sea positivo indica que la energía del sistema barco/agua ha aumentado, cosa que se cumple cuando $d'=(h_G-h_E) > d=(h'_G-h'_E)$ (de-muéstrese).

Como corolario se deduce que en el estado de equilibrio, los cuerpos flotantes presentan **mínima distancia** entre centro de empuje y baricentro.

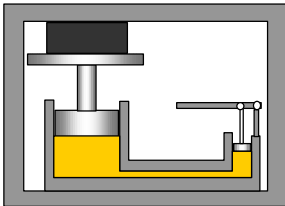
Algunas consecuencias del teorema general de la hidrostática

- En una masa fluida homogénea en equilibrio, los planos horizontales son planos de igual presión.
- La presión que un líquido en equilibrio ejerce sobre la pared del vaso que lo contiene no depende de la forma ni orientación de éste.
- La superficie libre de un líquido en equilibrio es una superficie de nivel constante.
- La presión sobre el fondo de un recipiente que contiene un líquido en equilibrio es independiente de la forma y cantidad de líquido contenido. Depende sólo de la profundidad a la que está el fondo desde la superficie libre y de la presión en ésta (normalmente la presión atmosférica).

¹³ Por ejemplo un golpe de viento sobre el velamen (no dibujado).

rica).

- La resultante de todas las presiones que actúan sobre la superficie que delimita una cierta porción de fluido es igual al peso de dicha porción, está aplicada en su baricentro, es vertical y dirigida hacia arriba.
- Todo cuerpo sumergido en un líquido recibe un empuje vertical hacia arriba igual al peso del volumen de líquido desalojado (principio de Arquímedes)
- En virtud del principio de acción y reacción, el de Arquímedes permite proponer este otro: El cuerpo sumergido produce sobre la masa fluida un empuje vertical hacia abajo igual al peso del volumen de líquido desalojado.



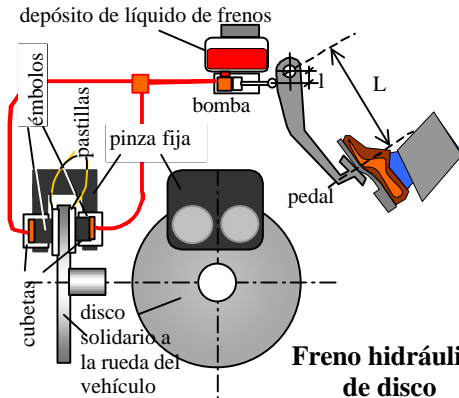
Principio de la prensa hidráulica

Algunas máquinas hidráulicas:

Prensa hidráulica – frenos hidráulicos

Un líquido incompresible confinado en un sistema rígido que posea dos émbolos de diferente diámetro sirve para transformar pequeños esfuerzos con gran recorrido en grandes fuerzas con pequeño recorrido o a la inversa. La prensa hidráulica se usa como tal para prensar fardos, empujar o subir pesos, ensayar materiales, etc. Una aplicación muy usada del

principio de la prensa hidráulica se encuentra en el freno de los automotores. En el dispositivo hay un cilindro con un pistón o émbolo de pequeña sección **s** sobre el que se aplica una fuerza **F**. La presión **F/s** se transmite a través de un sistema de conductos de acero de pequeño diámetro, llenos de un líquido casi incompresible a base de glicoles de alto punto de ebullición, a los cilindros de mayor diámetro montados en una robusta pinza fija sita a horcadas de los discos en las ruedas. Los pistones o émbolos de mayor diámetro, generalmente dos por rueda, son los encargados de aplicar la presión de frenado a los discos solidarios a éstas, a través de pastillas de acero recubiertas de material resistente a la fricción y a la temperatura ¹⁴, que se produce en cada frenada.



Freno hidráulico de disco

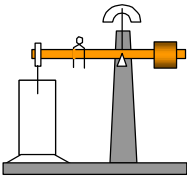
¹⁴ Antiguamente se usaba en cintas y pastillas de freno una resina con amianto, hoy reemplazado por fibras menos contaminantes.

Las pastillas rozan ligeramente los discos, sin hacer fuerza mientras que no haya presión en el sistema hidráulico. La carrera del émbolo de la bomba es de unos pocos centímetros, ya que los pistones del freno están casi rozando los discos. Así, cuando se pisa el pedal recorren sólo distancias del orden del milímetro, necesitando muy poco desplazamiento del fluido. El conjunto permite una gran multiplicación de la fuerza F del pié del conductor sobre el pedal, aún en los sistemas sin servomecanismo¹⁵.

Algunos cálculos:

La primera multiplicación (mecánica) se logra en base a la palanca del pedal que posee $L=30\text{ cm}$ de largo, y que acciona al émbolo de la bomba de freno a escasos $l=3\text{ cm}$ del extremo. Con ello se logra que la fuerza sobre él sea de $30/3 = 10$ veces de la pisada. El pistón de la bomba de freno tiene un diámetro del orden de 1 cm , mientras que los pistones de las cubetas de frenos sobre las ruedas son de 4 cm , y son cuatro por rueda. Esto multiplica la fuerza en relación a las superficies entre los pistones, o sea $4 \times 16=64$ veces. En definitiva, si el conductor aplica una fuerza de $5\text{ Kg} = 49\text{ N}$ en el pedal, sobre los patines de freno actuará una fuerza **640 veces mayor**, esto es **31360 N**. Si el coeficiente de rozamiento entre pastillas y disco es de $0,3$, la fuerza de frenado por rueda será de **9408 N**, que aplicada a unos 15 cm del eje de giro representa un momento de frenado $M_f=1411\text{ Nm}$. Si el auto marcha a $v=60\text{ Km/h}$, cada rueda (que supondremos de $15''=0,381\text{ m}$ de radio) girará a una velocidad angular de $w=v/r = 60000/3600/0,381 = 44\text{ rad/s}$, y si se aplican los frenos con los datos apuntados antes, la potencia de frenado será de $P_f=M_f.w=62092\text{ W}$. (del mismo orden que la potencia nominal del motor del auto). Considerando que sólo frenan las rueda delanteras, se tendrá una fuerza total de frenado F_f aplicada sobre el pavimento igual a la correspondiente al doble del momento de frenado dividido el radio de la rueda, esto es $F_f = 2 \times 1411 / 0,381 = 7366\text{ N}$ (740 Kg). El vehículo, de masa $m=1000\text{ Kg}$, se detendrá en un tiempo Δt tal que $m.v = F_f . \Delta t$.

Así resulta $\Delta t=1000.60000/3600/7366=2.26\text{ s}$. El espacio recorrido en este tiempo será $e = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} v . t = \frac{1}{2} \times 16,66 \times 2.26 = 19\text{ m}$



Balanza hidrostática de Mohr

Este dispositivo mide densidades de líquidos y sólidos a través del empuje que reciben los cuerpos sumergidos. Consiste en una balanza generalmente de brazos desiguales que se lleva a equilibrio antes y después de sumergir un cuerpo de masa m y volumen V en una cubeta de líquido. Sean las lecturas en ambos casos m y m'

respectivamente, y las densidades del sólido y del líquido δ_s y δ_l
 Se cumple que $m = V . \delta_s$ y además $m' = V . \delta_s - V . \delta_l = V . (\delta_s - \delta_l)$, entonces es $m - m' = V . \delta_l$ y además $m'/m = 1 - \delta_l/\delta_s$

Ejemplo: Un cilindro de cobre acusa una masa de $m=50\text{ g}$ y al sumergirlo en un líquido desconocido resulta una lectura $m'=45\text{ g}$. Qué densidad tiene el líquido, sabiendo

¹⁵ Si, como en la mayoría de los vehículos modernos, existe un servo-freno, éste suma a la fuerza del pié la de un pistón accionado por la succión del motor, haciendo aún menos esforzada la frenada.

que el cobre posee $\delta_s=8 \text{ g/cm}^3$.
 Respuesta: $\delta_l=(1-m'/m) \cdot \delta_s=0,8 \text{ g/cm}^3$

Neumostática

Gases – generalidades

Los gases son flúidos compresibles, que disminuyen su volumen con la presión, y que tienden a expandirse hasta ocupar todo el volumen del recipiente que los contiene.

La experiencia demuestra que todos los gases conocidos se licúan sometidos a presión por debajo de una cierta temperatura crítica. El gas considerado como proveniente de un líquido se llama vapor. El vapor puede estar saturado, cuando está en equilibrio con la fase líquida, o sobrecalentado cuando está a temperatura y presión superiores a las de condensación.

Ecuación de estado de gases ideales

Lejos de estas condiciones de licuación, o sea bien por encima de la temperatura crítica y a bajas presiones, los gases reales responden con gran aproximación a un modelo de “gas ideal”, que cumple las siguientes leyes:

A temperatura constante, la presión es inversamente proporcional al volumen ocupado, es decir $p = k_1/v$, o si se prefiere **$p \cdot v = k_1$**

Esta expresión es atribuida por los ingleses al físico inglés Robert Boyle (1627-1691) y por los franceses al físico francés Edmundo Mariotte (1620, 1684). Se la conoce como ecuación de Boyle-Mariotte. Se la expresa usualmente diciendo que a temperatura constante, el producto de la presión por el volumen es constante.

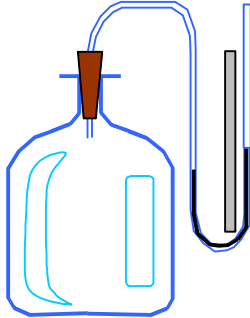
Asimismo se cumple que cuando el volumen **v** se mantiene constante, la presión **p** es directamente proporcional a la temperatura absoluta **T**, que sale de sumar una constante a la escala termométrica usual. Es decir que a volumen constante es **$p = k_2 \cdot T$**

También se cumple que cuando la presión **p** se mantiene constante, el volumen ocupado **v** es directamente proporcional a la temperatura absoluta **T**, con la misma constante de proporcionalidad k_2 que en el caso del volumen. o sea que a presión constante vale **$v = k_2 \cdot T$**

Termómetros absolutos

Las leyes anteriores nos autorizan a construir termómetros absolutos, co-

nectando un medidor de presión a una botella cerrada con un gas cualquiera en su interior (volumen constante), o bien un medidor de volumen conectado a un sistema que se puede expandir sometido a presión constante (por ejemplo contra la atmósfera, suponiendo que se mide durante un lapso en que la presión atmosférica sea sensiblemente constante). En ambos casos, la medición será proporcional a la temperatura absoluta.



Termómetro de gas

Se repite la historia de la puja entre ingleses y franceses con las leyes citadas, que relacionan volumen a presión constante o presión a volumen constante. Los británicos la adjudican al inglés **Charles** (1787) y los galos a su compatriota **José Gay-Lussac**.

Cuando varían presión y temperatura simultáneamente, se puede hallar el volumen aplicando el principio de superposición, ya que se trata de leyes lineales. Se considera primero un aumento de temperatura de T_1 a T_2 y el correspondiente aumento de presión de p_1 al estado intermedio p'_1 a volumen v_1 constante. Después se supone el

aumento de volumen a de v_1 a v_2 a temperatura T_2 constante, que lleva a la presión al valor final p_2

Resulta así:

- Aumento de presión a volumen v_1 constante
- Aumento de volumen a temperatura T_2 constante
- Multiplicando miembro a miembro es
- O sea:

$$\begin{aligned}
 p_1/p'_1 &= T_1/T_2 \\
 p'_1 \cdot v_1 &= p_2 \cdot v_2 \\
 p_1 \cdot v_1 &= p_2 \cdot v_2 \cdot T_1/T_2 \\
 p_1 \cdot v_1 / T_1 &= p_2 \cdot v_2 / T_2 = k
 \end{aligned}$$

Quiere decir que para una misma masa M_G de gas en equilibrio el producto de la presión por el volumen ocupado, dividido la temperatura absoluta toma un valor constante k . Esa constante depende de la naturaleza del gas en cuestión y es proporcional a la masa M de gas considerada, o sea que podemos poner $p \cdot v / T = M_G \cdot R_G$, que resume las leyes de **Boyle-Mariotte** y **Charles-Gay Lussac**.

¿Qué significa la constante R ? Sus dimensiones son energía por unidad de temperatura y por unidad de masa: es una constante que depende de la energía específica del gas en cuestión.

Si el peso molecular del gas es M , será $M_G = n \cdot M$, para n = número de moles del gas en cuestión, la anterior puede escribirse como $p \cdot v / T = n \cdot M \cdot R_G$, siendo $M \cdot R_G$ independiente del gas y sólo depende del número de moléculas encerradas en el volumen v . Esta constante $R = M \cdot R_G$ tiene un valor universal para cualquier gas, de **8,31 J/°K/mol**

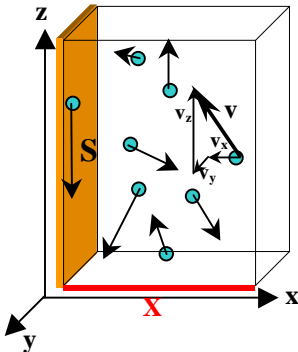
Veremos a continuación cómo esta fórmula encaja dentro de un modelo de gas descrito como “**teoría cinética de los gases**”.

La teoría cinética de los gases

Ya en 1738, el médico, matemático y físico suizo **Daniel Bernoulli**, miembro de una célebre familia de científicos encabezada por Jacobo Bernoulli, describía en una famosa tesis a una masa de gas como un conjunto de pequeñas partículas (átomos o **moléculas**) que interaccionan entre sí con choques **perfectamente elásticos**, que se ajustan a las leyes de la mecánica de Newton. La presión del gas contra las paredes del recipiente se explica, como se verá a continuación, por la acción promedio de innumerables choques de estas moléculas contra esas superficies. La energía cinética promedio de las moléculas (**energía interna**) se mide a través de una variable estadística que coincide con la variable macroscópica llamada **temperatura absoluta**. Las leyes experimentales que relacionan presión a volumen constante y volumen a presión constante junto con la hipótesis aventurada por **Amadeo Avogadro** en 1811, de que todos los gases poseen la misma cantidad de moléculas en el mismo volumen a la misma presión, se combinan naturalmente con esta teoría, cuyo tratamiento estadístico fué desarrollado por el escocés **James Clerck Maxwell** y el austriaco **Ludwig E. Boltzmann** a mediados del siglo XIX, dando como resultado lo que se conoce como la “**teoría cinética de los gases**”

Presión sobre las paredes del recipiente

Veremos, siguiendo los razonamientos de Daniel Bernoulli, cómo la **presión** que ejercen los gases sobre las paredes del recipiente se explica según el modelo cinético por la acción de innumerables choques por unidad de tiempo de un enjambre de moléculas que se mueven caóticamente. También veremos cómo se puede caracterizar ese **caos** con indicadores estadísticos tales como su velocidad media y otros parámetros, y gracias a los trabajos de Maxwell y Boltzmann, por la **distribución estadística** de sus velocidades.



Sea un pedazo de pared vertical de superficie **S** que limita un volumen **V=S.X** lleno de un gas que tiene en promedio **N** moléculas todas ellas iguales de masa **m**, que tienen velocidades de componentes **v_{xi} v_{yi} v_{zi}**, para **i=1,2,3...n**.

En el análisis siguiente admitiremos que las componentes de la velocidad de las moléculas según los tres ejes **x,y,z** son absolutamente equivalentes e independientes entre sí, por lo que el razonamiento siguiente en la

dirección x se podrá aplicar a las otras dos. En el intervalo de tiempo $Dt=X/v_x$ chocarán contra la pared un número de moléculas n_{vx} igual a la mitad de las que se encuentran en el volumen considerado $V=S.X$ que tienen velocidades v_x , ya que las de la mitad restante se alejarán de ella, sin producir acción alguna. La fuerza que produce cada molécula que choca elásticamente contra la pared cuya componente de velocidad según el eje x valga v_{xi} está dada por la variación de la cantidad de movimiento en un tiempo $Dt=X/v_{xi}$, que vale

$$F_{vxi} = D(m_i \cdot v_{xi})/Dt = m_i \cdot (v_{xi} - (-v_{xi}))/Dt = 2 \cdot m_i \cdot v_{xi}/Dt = 2 \cdot m_i \cdot v_{xi}^2/X.$$

Ahora bien, la fuerza total producida por la mitad de todas las moléculas que están en el volumen $V=SX$ será la fuerza de cada molécula $2 \cdot m_i \cdot v_{xi}^2$ por la mitad del número n_{vxi} de ellas que tienen esa velocidad, extendiendo esa operación a todas las velocidades posibles. Se supone que el intervalo posible de velocidades queda cubierto con la serie vx_1, vx_2, \dots, vx_n , de manera que se puede poner:

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot S n_{vxi} F_{vxi} = (m_1 \cdot n_{vx1} \cdot v_{x1}^2 + m_2 \cdot n_{vx2} \cdot v_{x2}^2 + \dots + m_n \cdot n_{vxn} \cdot v_{xn}^2)/X,$$

Como $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ (las masas de todas las moléculas son iguales), la anterior resulta:

$$F_x = m S n_{vxi} v_{xi}^2/X$$

La presión es fuerza / superficie, o sea
 $p = F_x/S = m S n_{vxi} v_{xi}^2/(X \cdot S) = m S n_{vxi} v_{xi}^2/V$

De acuerdo a la ley de los gases es $p \cdot V = M \cdot R_G \cdot T$ y entonces
 $M \cdot R_G \cdot T = m S n_{vxi} v_{xi}^2$ pero como la masa de gas $M = N \cdot m$ resulta:
 $R_G \cdot T = 1/N (S n_{vxi} v_{xi}^2)$

Energía cinética media de las moléculas

Las moléculas de velocidad v_i tienen una energía cinética media de $e_i = \frac{1}{2} m v_i^2$, siendo $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$. Considerando que la energía se debe repartir estadísticamente en partes iguales para las tres direcciones, resulta que la energía cinética media del gas será la suma de energías extendida a todas las velocidades posibles:

$$E_c = \frac{1}{2} m S (n_{vxi} v_{xi}^2 + n_{vyi} v_{yi}^2 + n_{vzi} v_{zi}^2) = \frac{1}{2} N \cdot m \cdot [3/N S n_{vxi} v_{xi}^2] = \frac{1}{2} M c^2$$

El significado matemático de $3/N (S n_{vxi} \cdot v_{xi}^2) = 1/N S n_v \cdot v^2$ es el de un promedio ponderado del cuadrado de las velocidades de las moléculas, llamado cuadrado de la **velocidad media cuadrática**, simbolizado por c^2 , por lo que $R_G \cdot T = 1/3 c^2$ o lo que es igual $M \cdot R_G \cdot T = R \cdot T = 1/3 M \cdot c^2 = 2/3 E_c$

La velocidad media cuadrática es la que deberían tener las moléculas de un estado ideal del gas (no posible por lo improbable estadísticamente, aunque imaginable) en que los módulos de sus velocidades fueran todos iguales, para poseer la misma energía cinética interna que el estado real.

Veremos que en el estado real (de máxima probabilidad) las moléculas poseen una distribución de velocidades de acuerdo a ciertas pautas estadísticas que veremos en seguida.

Asimismo, el significado estadístico de la temperatura absoluta de un gas es una medida de la energía cinética media de sus moléculas.

¿Por ejemplo, cuál será la **velocidad cuadrática media** de las moléculas de nitrógeno ($M=0,028$ Kg/mol) del aire a $15^{\circ}\text{C} = 288$ K ($^{\circ}$ absolutos)?

Resulta entonces que

$$c = (3.R.T/M)^{1/2} = (3 \cdot 8,31 \text{ J}^{\circ}\text{K/mol} \cdot 288^{\circ}\text{K} / 0,028 \text{ Kg/mol})^{1/2} = 506 \text{ m/s}$$

¿Qué energía cinética tiene un mol de N_2 en las condiciones anteriores?

Respuesta: $E_c=3/2.R.T = 3590$ J/mol

Distribución de las velocidades

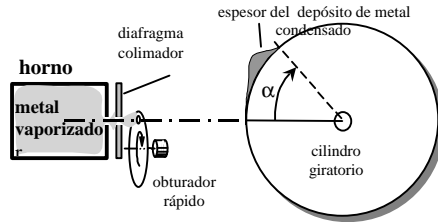
Sin hacer ningún cálculo, es imaginable que en una masa de algunos litros de gas, donde billones de moléculas chocan por doquier, habrá sin embargo un equilibrio estadístico dentro de ese caos, y que si bien no podemos asegurar el estado actual de una molécula particular ni su futuro, será posible establecer categorías probables entre ellas. Supongamos que pudiéramos tomar una foto instantánea del conjunto de moléculas donde aparezcan éstas y sus velocidades en módulo. Como en los censos de población, el resultado de los datos se podría resumir en indicadores tales como la velocidad media (momento de primer orden) cuadrática media, máxima, mínima, dispersión de velocidades (momento de segundo orden) y en general una tabla de cuántos individuos tienen velocidades $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, o sea la **forma de la función** de distribución de velocidades que cubra todas las velocidades posibles. Gracias a ingeniosas experiencias, se ha podido censar una población de moléculas viajeras a través de una muestra extraída de un estado gaseoso. Esta experiencia, que relataremos brevemente a continuación, vino a confirmar los resultados deducidos por Maxwell y Boltzmann muchos años antes.

La experiencia de Zartman

En 1931, el físico Zartman realizó una experiencia para hallar la distribución de velocidades en un gas, clasificando las moléculas del total por intervalos estrechos de velocidad vx_1, vx_2, \dots, vx_n . La experiencia se basa en que si de un gas confinado en equilibrio se deja escapar un chorro muy fino hacia un espacio vacío durante un tiempo determinado, las moléculas que salen según esa dirección no interaccionan entre si y se van distanciando del orificio de salida según sus velocidades. Si la muestra que escapó es suficientemente grande como para representar al gas interior confinado, la cantidad

de moléculas en función del tiempo que van llegando a un punto alejado de la fuente representará la proporción de moléculas en función de la velocidad que poseían en la fuente.

Es de esperar que, como en el caso de una maratón, lleguen primero unos pocos atletas excepcionales, luego cada vez más juntos los buenos corredores hasta llegar a un máximo el flujo de participantes medianos. La frecuencia de llegada irá luego disminuyendo con los más lentos y habrá que esperar bastante tiempo para ver la llegada de los más rezagados. Es probable en una prueba sin límite de tiempo en la que participen muchos corredores, haya algunos pocos con un retraso enorme.



Experiencia para obtener la distribución de velocidades moleculares de un gas

Si representamos gráficamente la frecuencia de llegada en función del tiempo obtendremos una curva acampanada con el máximo más cerca del principio que del final, con una larga cola hacia atrás. Esto es precisamente lo que ocurre con las moléculas de nuestro chorro gaseoso, que se produce en un horno al vacío con un metal de bajo punto de fusión y buena difusibilidad (por ejemplo bismuto). El vapor confinado escapa por un orificio estrecho del horno, se transforma en un haz gracias a un diafragma colimador y es recortado durante un instante por un obturador tipo fotográfico, que limita el paso de una porción de moléculas hacia la meta. La columna de moléculas con muy poca interacción entre ellas, ya que tienen velocidades principalmente orientadas en la dirección de avance, se estratifica por el camino según la rapidez de sus integrantes. En la llegada son recibidos por una superficie fría que se desplaza (una placa transparente arrollada en un cilindro que gira), quedando incrustados próximos los de igual categoría de rapidez. La placa presenta una franja con una densidad de metal depositado proporcional a la frecuencia de llegada de las moléculas. Examinado el depósito de metal condensado por transparencia o medido su espesor al microscopio, arroja los resultados que se han exagerado en el dibujo: un depósito que empieza en un punto, aumenta su densidad y se esfuma en una larga cola.

La distribución de Maxwell-Boltzmann

Dijimos que el resultado experimental vino a confirmar la fórmula de distribución teórica que independientemente Maxwell (1831-1879) y Boltzmann (1844-1906), dedujeran muchos años antes.

Explicaremos el camino seguido para deducir la fórmula, debido a la importancia del método y sus conclusiones, aplicables ambos a otros “gases” no

moleculares, como los de electrones y fotones. Los que no tengan el nivel matemático requerido tienen las siguientes opciones:

- Adquirir dichos conocimientos de cálculo (se recomienda)
- Creer en los resultados y profundizar luego sus fundamentos (una opción intermedia)
- Pasar por alto el capítulo (desaconsejada)

En un gas en equilibrio el promedio vectorial de velocidades debe ser nulo si admitimos que su centro de gravedad está en reposo. Las moléculas cambian incesantemente su velocidad a través de innumerables interacciones entre sí y contra las paredes del recipiente. Cada molécula tiene un comportamiento impredecible en forma particular, porque está ligado al de una gran cantidad de otras moléculas. Sin embargo se pueden encontrar indicadores estadísticos que caractericen el movimiento global del conjunto. Ya vimos la velocidad media cuadrática como uno de ellos. Se trata ahora de buscar la distribución de las velocidades de las moléculas en módulo, es decir su intensidad prescindiendo de su sentido. La distribución da el número de moléculas que en todo momento están en un determinado nivel de energía cinética, o de su equivalente velocidad.

Modelo de Boltzmann – Estado y complejión

Para tal análisis, siguiendo la idea de Boltzmann, se asimila un botellón de gas a una urna con bolillas que van cayendo a un clasificador en cuyos casilleros pueden disponerse el total de las bolillas de cualquier manera. Así como todas las moléculas de una masa de gas podrían concebirse con un estado instantáneo de velocidades iguales, el modelo urna-casilleros las representaría con todas las bolillas en un sólo casillero. Se postula que el **estado** real del gas en equilibrio, caracterizado por cuántas moléculas hay en cada categoría de velocidad o energía, será de configuración tal que tenga la máxima probabilidad entre todos los **arreglos** posibles. Estos arreglos o “**complejiones**”, como los llama Boltzmann, se caracterizan al contrario de los **estados**, por identificar cuáles moléculas (además de cuántas) hay en cada categoría de energía o velocidad, admitiendo que las moléculas se pueden identificar, así como las bolillas tienen un número impreso. Un estado estable en equilibrio debe imaginarse como un tránsito incesante entre complejiones equivalentes, en el que las bolillas o las moléculas intercambian sus lugares o energías, pero donde lugares o energías conservan su distribución sobre diferentes individuos.

Consideremos un modelo sencillo, con **cinco** bolillas y **dos** casilleros. El orden dentro de un mismo casillero no reviste interés en este modelo, ya que la energía o velocidad del casillero es la misma para todos los elementos que estén en él. Comencemos por analizar las diferentes maneras de ubicar las bolillas, numeradas de uno a cinco, dentro de los casilleros primero y segundo.

Así, por ejemplo, habrá **diez complejiones** posibles para **un estado** de

cinco bolillas en **dos** casilleros, con **dos** bolillas en el primer casillero y **tres** bolillas en el segundo, a saber:

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1,2-3,4,5 | 1,3-2,4,5 | 1,4-2,3,5 | 1,5-2,3,4 |
| 2,3-1,4,5 | 2,4-1,3,5 | 2,5-1,3,4 | 3,4-1,2,5 |
| 3,5-1,2,4 | 4,5-1,2,3 | | |

Con idéntico razonamiento podemos afirmar que hay otras **diez complejiones** para el **estado tres-dos**, **cinco complejiones** para el **estado uno-cuatro** y otras **cinco complejiones** para el estado **cuatro-uno**. ¿Debemos considerar posible los **estados cero-cinco y cinco-cero**? Claro, eso suma otras dos complejiones posibles. En total hay $1+1+5+5+10+10 = 32$ complejiones posibles.

Se demuestra que **n** moléculas en **m** casilleros pueden disponerse de **mⁿ** maneras posibles. En nuestro caso es $2^5=32$, como lo acabamos de ver.

También se demuestra que el número de complejiones para un estado dado es menor que el número de maneras en que se puede ordenar la población. Una serie de N elementos se puede ordenar de diferentes maneras, cambiando el orden o sea permutando su ubicación en la serie. El número total de permutaciones posibles de N elementos está dado por una operación llamada factorial de N representado por N! o fact(N), igual al producto N.(N-1).(N-2)....hasta llegar a la unidad.

El número de permutaciones totales de los N elementos (N!) se divide por las permutaciones dentro del casillero, puesto que como dijimos, no representan otra variante a tomar en cuenta en nuestro análisis por categorías. Así resulta:

Número de complejiones de **cinco** elementos con **tres** en el primer casillero y **dos** en el segundo casillero = $5!/3!/2! = 5.4.3.2/3.2/2=10$

¿Cuál será el estado de máxima probabilidad para este “gas” de cinco moléculas?

Se define probabilidad matemática como el cociente entre casos favorables y casos posibles.

De tal manera, podremos hacer la siguiente tabla:

Estado	Probabilidad
cero-cinco	1/32
uno-cuatro	5/32
dos-tres	10/32
tres-dos	10/32
cuatro-uno	5/32
cinco-cero	1/32

Hay pues **dos** estados posibles de **máxima probabilidad**: el **dos-tres** y el **tres-dos**. Quiere decir que según el modelo, un gas de cinco moléculas con dos niveles posibles de energía tiene mayor probabilidad de existir con una distribución dos-tres o tres-dos, que cualquier otra.

Por supuesto que llevar este razonamiento aún a una pequeña burbuja de gas, que contiene una millonésima de mol, con 6×10^{17} moléculas, eligiendo una partición de mil intervalos de velocidades posibles, entre cero y 10000 m/s, para abarcar un rango lógico, daría un menudo trabajo....imposible aún para un ejército de calculistas.

Deducción de la ley de distribución de velocidades¹⁶

Otro es el método de Boltzmann, mucho más eficiente, que analiza la función que da los **casos favorables** (ya que el denominador, que representa el número de casos posibles es siempre el mismo). A esta cantidad llama Boltzmann “**probabilidad termodinámica**”¹⁷ variable de estado ligada a los procesos de transformación de sistemas estudiados por la termodinámica.

La probabilidad termodinámica de un estado, o sea los casos posibles para **N** moléculas que se distribuyen con n_1 moléculas en el casillero N°1, n_2 en el N°2,...y n_m moléculas en el casillero emésimo resulta, según lo ya visto, el cociente entre todas las permutaciones posibles de la serie de **N** elementos dividido las permutaciones dentro del mismo casillero, esto es:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = N! / (n_1! n_2! n_3! \dots n_m!)$$

Esta probabilidad es **máxima** cuando el denominador se hace **mínimo**, ya que el numerador es constante para un número de elementos dado. La condición de denominador mínimo es pues la clave para encontrar el estado de **máxima probabilidad**, que corresponderá al estado de equilibrio.

El mínimo o el máximo de una función continua está en los puntos donde se anula su pendiente (cimas o valles). La pendiente está representada por su función derivada, la que igualada a cero determina una ecuación diferencial que se satisface para valores de pendiente horizontal. Pero el denominador en cuestión no es una función derivable en forma sencilla. Hay que transformarla para que lo sea. Primeramente se le aplica logaritmos. El logaritmo del denominador sigue las variaciones de su argumento, o sea que es máximo cuando el denominador es máximo, y mínimo cuando el denominador es mínimo. Además transforma el producto en suma. Queda entonces:

$$\ln(D) = \ln(n_1!) + \ln(n_2!) + \ln(n_3!) + \dots + \ln(n_m!) \quad [1]$$

Luego se reemplaza el logaritmo natural del factorial por una aproximación atribuida al matemático escocés **James Stirling** (1692-1770 pero que en realidad pertenece al matemático francés **Abraham De Moivre** (1667-1754):

$$\ln(n!) \approx n \cdot \ln(n) - n, \text{ fórmula aproximadamente válida para } n \gg 1 \quad [2]$$

¹⁶ Es equivalente hablar de energías o velocidades. Trabajando con volúmenes gaseosos de poco espesor Dh podemos despreciar la energía potencial $m \cdot g \cdot Dh$, y considerar que una molécula puntual de masa m que se desplaza a velocidad v posee únicamente energía cinética $E = E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

¹⁷ La probabilidad termodinámica es una variable que no tiene como límite superior la unidad, como ocurre con una probabilidad matemática.

n	n!	ln(n!)	n.ln(n)-n	Error(%)
3	6	1,79	0,30	83,49
5	120	4,79	3,05	36,35
10	3628800	15,10	13,03	13,76
50	3,0414E+64	148,48	145,60	1,94
100	9,333E+157	363,74	360,52	0,89

Como se ve, la fórmula de Stirling -De Moivre da un error menor que 1% para n>100 . Es de sobra aceptable en el análisis que haremos a continuación, que trata de una masa de gas con un número de individuos muchísimo mayor.

Diferenciando [1] y teniendo en cuenta [2] resulta

$$d \ln(D) = d S n_i \ln(n_i) - d S n_i ,$$

pero como $S n_i = N = \text{número total de moléculas} = \text{cte}$, es

$$d \ln(D) = S [n_i \cdot dn_i/n_i + \ln(n_i) \cdot dn_i] = S [1 + \ln(n_i)] dn_i = 0 \text{ (condición de mínimo) [3]}$$

Teniendo en cuenta que

$$S dn_i = d S n_i = dN = 0, \tag{4}$$

la [3] queda:

$$d (\ln D) = S [\ln(n_i)] dn_i = 0 \tag{5}$$

La energía total **E** del gas es la suma de la energía de las moléculas, que a su vez se obtiene sumando las energías en cada categoría e_i por el número de moléculas n_i en esa categoría, es decir

$$E = S e_i \cdot n_i \tag{6}$$

La condición de que la energía total se mantenga estable, o sea que la masa de gas esté en equilibrio, se traduce en variación nula de la [6]

$$dE = S e_i \cdot dn_i = 0 \tag{7}$$

Las ecuaciones [3],[4] y [7] establecen tres condiciones independientes del sistema:

- que el número de moléculas sea constante (sistema cerrado)
- que la probabilidad del estado sea máxima (condición necesaria para el estado real)
- que la energía sea estable (equilibrio)

Para resumirlas en una sola condición se puede plantear una combinación lineal de ambas, con constantes A y B a determinarse luego, a saber

$$A \cdot \{S [\ln(n_i)] dn_i\} + B \cdot \{S e_i \cdot dn_i\} = 0 \tag{8}$$

Desarrollando la anterior se obtiene la serie

$$S(A \cdot \ln(n_i) + B e_i) dn_i = 0 \tag{9}$$

La única solución posible para que se anule la serie [9] es que todos sus términos sean nulos, puesto que $\ln(n_i)$ y e_i son siempre positivos.

Se puede poner para cualquier intervalo de energía i que:

$$(A \cdot \ln(n_i) + B e_i) dn_i = - dN = 0 \text{ de donde } A \cdot \ln(n_i) = -B \cdot e_i , \text{ y tomando antilogaritmos es}$$

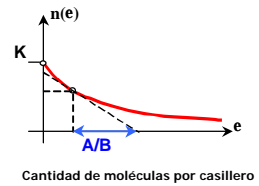
$$n_i = \exp(-B/A \cdot e_i) = 1 / [\exp(Be/A)]^{18} \quad [10]$$

La [10] expresa que la cantidad de moléculas en cada categoría o "casillero" de energía e decrece exponencialmente con esa energía; puede ponerse bajo la forma:

$$n(e) = \exp(1/A) \exp(-B \cdot e) = K \cdot \exp(-B \cdot e) \quad [11]$$

El significado de K se obtiene haciendo $e=0$ con lo que la exponencial es la unidad y entonces $n(0)=K$, es decir que la constante K representa la cantidad de moléculas que tienen energía nula en el la categoría considerada.

Se muestra en la figura la representación de la función $n(e)$ para un intervalo o categoría de energía e_i . La subtangente en un punto cualquiera de la curva representa la constante de decrecimiento A/B .



Ahora bien, pasemos a trabajar en todo el intervalo posible de energías, o sea desde cero a infinito, puesto que no podemos descartar que siempre haya alguna molécula de energía más alta que el límite impuesto. A lo sumo podemos concebir de antemano que esas moléculas muy rápidas serán muy escasas, como lo muestra el escaso espesor del metal condensado en el comienzo de la tira de la experiencia de Zartman.

La energía de una molécula puntual de masa m es la suma de su energía cinética de traslación $e_c = \frac{1}{2} m v^2$ y de su energía potencial $e_p = m \cdot g \cdot z$, para $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ de donde $de = m \cdot v \cdot dv + m \cdot g \cdot dz$. En el análisis siguiente despreciaremos la variación en altura y consecuentemente permanecerá constante la energía potencial e_p .

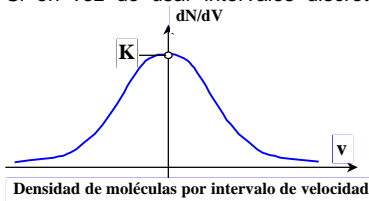
Cambiando de la variable energía e a la variable velocidad v a través de las fórmulas ya vistas, la [11] puede ponerse bajo la forma:

$$n(v_i) = K \cdot \exp(-B/2 \cdot v_i^2) \quad [12]$$

Sumando todos los elementos se obtiene el número total de moléculas N :

$$N(v) = \sum_i n(v_i) \quad [13]$$

Si en vez de usar intervalos discretos de velocidad v_i ($i=1,2,3..n$) trabajamos con saltos diferenciales en módulo dv tendientes a cero, el número de moléculas $N(v)$ por intervalo de velocidad pasa a ser un cociente incremental que tiene el significado de **densidad** de número de moléculas por unidad de intervalo de velocidad dv (se usa V mayúscula para designar un espacio de velocidad, cuyo módulo esté entre v y $v+dv$).



Entonces, la [13] junto con la [14] nos da:

$$dN(v)/dV = n(v_i) = K \exp(-B/2 \cdot v_i^2) \quad [14]$$

o sino también:

¹⁸ Por comodidad tipográfica se expresa en este párrafo la exponencial e^x como $\exp(x)$, para $e=2,7182818\dots$ (base de los logaritmos naturales)

$$dN(\mathbf{e}) = K \exp(-B/2.m.v^2) dV \quad [15]$$

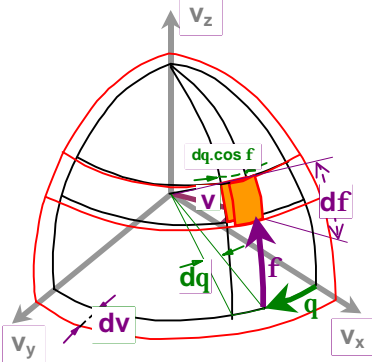
En cada casillero o nivel de energía dV (V mayúscula) entrarán todas las moléculas que tengan el mismo módulo de velocidad v . La densidad o probabilidad de encontrar una cantidad n de moléculas de velocidad determinada dentro de un casillero o categoría de velocidad expresada en la [14] es una campana de Gauss, como se muestra en la figura adjunta.

Lo mismo que la exponencial vista anteriormente en el caso de las energías, indica que la cantidad de moléculas que probablemente se encuentren en un casillero es máxima para la categoría de velocidad nula y disminuye para categorías de velocidades crecientes.

Sin embargo, la velocidad es un vector, y la [15] sólo contempla la variación de la velocidad en sentido positivo y negativo en forma unidimensional.

Para extender el análisis a todas las direcciones posibles en el espacio, las categorías de igual módulo pueden representarse como el lugar geométrico de los vectores velocidad de igual longitud v , esto es una esfera de radio v , en un espacio donde las dimensiones son velocidades.

Para integrar la expresión [15] a toda esa esfera conviene usar en vez de coordenadas cartesianas v_x, v_y, v_z , otras más cómodas: las coordenadas esféricas en el espacio de las velocidades, a saber:



- v (módulo de la velocidad),
- q (acimut)
- f (altura)

De acuerdo a la figura, el elemento de volumen de velocidad que en coordenadas cartesianas vale $dV = dv_x.dv_y.dv_z$, resulta en coordenadas esféricas igual al producto de los tres lados de una especie de **caladura de sandía** que se puede aproximar a un paralelepípedo de lados:

- $[dv]$
- $[v.\cos f.dq]$
- $[v.df]$

Por lo tanto el elemento de volumen en coordenadas esféricas resulta:

$$dV = [dv].[v.\cos f.dq].[v.df] = v^2.\cos f,$$

Elemento de volumen de velocidad
 $dV = v^2 . \cos f.dq.df.dv$

$dv.dq.df$

Entonces la [15] queda:

$$d^3N(\mathbf{v},q,f) = n(\mathbf{v}) = K \exp(-B.m.v^2/2) v^2.\cos f.dq.df.dv \quad [15]$$

Dejando solamente como variable la velocidad, podemos integrar a la [15] para las otras dos variables f, q , sobre la esfera de radio v y espesor dv y entonces:

$$dN/dv = K.e^{Bmv^2/2}.v^2. \int_{\theta=0}^{\theta=2\theta} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \cos \phi . d\phi . d\theta = 4.p.K . e^{Bmv^2/2}.v^2 \quad [16]$$

Si integramos la [16] a todo el espacio de las velocidades, debe dar como resultado el número total de moléculas en todo el espacio, o sea N.

Ahora bien, la integral

$I = \int_0^{\infty} \exp(-B.m.v^2/2) v^2 .dv$ se logra integrando por partes, con la fórmula

$\int \dot{p}.dq = p.q - \int q.dp$ para $p = v$; $dq = \exp(-B.m.v^2/2) v .dv = \exp(-B.m.v^2/2) d(v^2/2)$, de donde $q = -1/B.m.\exp(-B.m.v^2/2)$ y además $dp = dv$
Entonces resulta:

$$I = -1/B.m.\exp(-B.m.v^2/2).v + 1/B.m \int \exp(-B.m.v^2/2).dv$$

$$I \Big|_0^{\infty} = [-1/B.m.\exp(-B.m.v^2/2).v]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-B.m.v^2/2).d(v.(B.m/2)^{1/2})$$

El primer término es una función que toma valor nulo en los límites: vale cero en el origen y cero en el infinito.

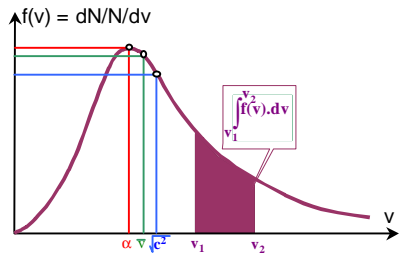
La integral del segundo término es la función error de Gauss integrada entre cero e infinito, que da el área total debajo de la campana, cuyo valor es $\sqrt{\pi}/2$

Así resulta $N = 4.K.p.I = 4.K.p.\sqrt{\pi}/2.(B.m)^{3/2} = K/(B.m/p\sqrt{\pi})^{3/2} = K(2.p/B.m)^{3/2}$
de donde $K = N.(B.m/p\sqrt{\pi})^{3/2}$

Haciendo $a^2 = 2/B.m$ resulta $N = K.\pi^{3/2}.a^3$

y también $dN/N/dv = f(v) = 4.p^{-3/2}.a^{-3}.v^2.\exp(-(v/a)^2)$ [17]

La [17] es la función de densidad de velocidades, que da la proporción de moléculas que tiene velocidades entre v y $v+dv$. Representada gráficamente es una curva acampanada que nace en el origen. Es asimétrica, con la cola hacia la derecha, tal como se representa en la figura. En el gráfico se señalan:



- la abscisa a correspondiente a la ordenada máxima, que es la **velocidad más frecuente**.
- la abscisa \bar{v} del centro de gravedad de la figura ; es la **velocidad media**
- la abscisa $\sqrt{\pi}a$, raíz cuadrada de la **velocidad media cuadrática**
- El área encerrada bajo la curva entre dos abscisas v_1 y v_2 , representada por la integral de la función de densidad $f(v)$ entre esos límites, indica la **proporción de moléculas** cuyas velocidades caen dentro de dicho intervalo de velocidades. Desde este punto de vista, la integral entre cero e infinito de $f(v)$ debe valer la unidad porque representa el total de las moléculas, es decir $\int_0^{\infty} f(v).dv = 1$ [18]

Que a es la abscisa que corresponde a la **ordenada máxima** se comprueba fácilmente al verificarse que la derivada de la función $f(v)$ en ese punto se anula (condición de máximo o mínimo) es decir $df(a)/dv=0$.

En efecto es $df(v)/dv = 4.p^{-3/2}.a^{-3} [2.v.\exp(-(v/a)^2) + v^2.\exp(-(v/a)^2).(-2.v/a^2)]$

El corchete se anula cuando $2v \cdot v^2 \cdot 2v/a^2 = 0$ de donde $1 - v^2/a^2 = 0$, es decir $v = a$

Ya vimos que c^2 se definía a partir de la energía total de las moléculas E_c de manera tal que $E_c = \frac{1}{2} N m c^2$, así entonces $c^2 = 2 \cdot E_c / M = m / M \cdot S n_i \cdot v_i^2$; pasando de variables discretas $n_1, n_2, v_1, v_2, \dots$ a variables continuas $n = N \cdot f(v) \cdot dv$, la anterior resulta

$$c^2 = \int_0^\infty f(v) v^2 dv = 4 \cdot p^{-1/2} a^{-3} \cdot \int_0^\infty \exp(-v/a)^2 v^4 \cdot dv \quad [19]$$

La integral $I = \int \exp(-v^2/a^2) \cdot v^4 \cdot dv$ se resuelva por partes poniendo

$$\int p \cdot dq = p \cdot q - \int q \cdot dp \quad \text{para } p = v^3; \quad dq = \exp(-v^2/a^2) v \cdot dv = -1/2 \alpha^2 \cdot \exp(-v^2/a^2) d(-v^2/a^2)$$

de donde $q = -1/2 a^2 \cdot \exp(-v^2/a^2)$ y además $dp = 3 \cdot v^2 \cdot dv$

Entonces resulta:

$$I = -1/2 \alpha^2 \cdot \exp(-v^2/a^2) \cdot v^3 + 3/2 \alpha^2 \int \exp(-v^2/a^2) \cdot v^2 \cdot dv$$

$$I \Big|_0^\infty = [-1/2 \alpha^2 \cdot \exp(-v^2/a^2) \cdot v^3]_0^\infty + 3/2 \alpha^2 \int_0^\infty \exp(-v^2/a^2) \cdot v^2 \cdot dv \quad [20]$$

El primer término es nulo, ya que la función toma valores nulos en los límites del intervalo cero e infinito. En cambio el segundo término incluye una integral del tipo $\int f(v) dv$ entre cero e infinito, que ya vimos debe valer la unidad, así que de acuerdo a [17] y [18] es:

$\int_0^\infty \exp(-v^2/a^2) \cdot v^2 \cdot dv = 1/(4 \cdot p^{-1/2} a^{-3})$ y entonces la integral [20] vale:

$$I \Big|_0^\infty = 3/2 a^2 / (4 \cdot p^{-1/2} a^{-3}) \text{ de donde la [19] resulta}$$

$$c^2 = 4 \cdot p^{-1/2} a^{-3} \cdot 3/2 a^2 / (4 \cdot p^{-1/2} a^{-3}) = 3/2 a^2 \quad [21]$$

La [21] nos da la relación entre la velocidad más probable y la media cuadrática. Se ve que $c > a$, tal cual se indica en el gráfico.

La **velocidad media** es el promedio ponderado de las velocidades, es decir que se cumple la relación $v_m = 1/N \int S n_i \cdot v_i$, y pasando a variables continuas es:

$$v_m = \int_0^\infty f(v) \cdot v \cdot dv = \int_0^\infty f(v) v dv = 4 \cdot p^{-1/2} a^{-3} \cdot \int_0^\infty \exp(-v/a)^2 \cdot v^3 \cdot dv \quad [22]$$

$I = \int \exp(-v^2/a^2) \cdot v^3 \cdot dv$ se resuelva por partes poniendo

$$\int p \cdot dq = p \cdot q - \int q \cdot dp \quad \text{para } p = v^2; \quad dq = \exp(-v^2/a^2) v \cdot dv = -1/2 \alpha^2 \cdot \exp(-v^2/a^2) d(-v^2/a^2)$$

de donde $q = -1/2 a^2 \cdot \exp(-v^2/a^2)$ y además $dp = 2 \cdot v \cdot dv$

Entonces resulta:

$$I = -1/2 \alpha^2 \cdot \exp(-v^2/a^2) \cdot v^2 + a^2 \int \exp(-v^2/a^2) \cdot v \cdot dv$$

$$I \Big|_0^\infty = [-1/2 \alpha^2 \cdot \exp(-v^2/a^2) \cdot v^2]_0^\infty + a^2 \int_0^\infty \exp(-v^2/a^2) \cdot v \cdot dv \quad [23]$$

El primer término es nulo, ya que la función toma valores nulos en los límites del intervalo cero e infinito. El segundo término incluye la integral entre cero e infinito $\int dq = 1/2 \cdot a^2$, así que la integral [23] vale:

$$I \Big|_0^\infty = 1/2 a^4 \text{ de donde la [22] resulta}$$

$$v_m = 4 \cdot p^{-1/2} a^{-3} \cdot 1/2 a^4 = 2 p^{-1/2} a \quad [24]$$

Relación entre velocidades estadísticas y temperatura

Los parámetros estadísticos recién vistos están en relación directa con el parámetro global conocido como temperatura absoluta del gas.

Del concepto de velocidad media cuadrática y su relación con la presión y la ley de los gases se obtuvo en la página 32 la expresión $c^2 = 3 R_G \cdot T$

En virtud de la [21] se deduce $\alpha^2 = 2 \cdot R_G \cdot T$, la que reemplazada en la [23] nos da para la velocidad media $v_m = 2 p^{-1/2} (2 \cdot R_G \cdot T)^{1/2} = (8 \cdot R_G \cdot T/p)^{1/2}$

Así entonces es

$$c^2 = 3 \cdot R_G \cdot T = 3 \cdot R/M \cdot T$$

$$a^2 = 2 \cdot R_G \cdot T = 2 \cdot R/M \cdot T$$

$$v_m^2 = 4/p \cdot 2 \cdot R_G \cdot T = 8/p \cdot R_G \cdot T$$

Para $M = N_A \cdot m$, con $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ (Número de Avogadro), m =masa de una molécula, y $k = R/N_A$, que es la constante de los gases para una molécula, llamada “constante de Boltzmann” resultan :

$$c^2 = 3 \cdot R/N_A/m \cdot T = 3 \cdot k \cdot T/m$$

$$a^2 = 2 \cdot R/N_A/m \cdot T = 2 \cdot k \cdot T/m$$

$$v_m^2 = 8/p \cdot R/N_A/m \cdot T = 8p \cdot k \cdot T/m$$

Recordando que la energía de una molécula es

$$e = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \text{ con } de = m \cdot v \cdot dv \text{ es } (v/a)^2 = m \cdot v^2/2/k/T = e/(k \cdot T)$$

La función de distribución queda así:

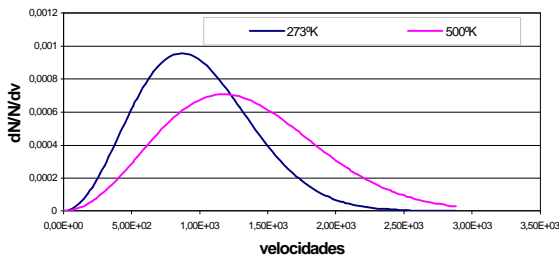
$$dN/N/dv = 4 \cdot p^{-1/2} (2 \cdot k \cdot T/m)^{-3/2} \cdot v^2 \cdot \exp(-m \cdot v^2/2/k/T) \quad [25]$$

y poniéndola en función de la energía e se transforma en:

$$dN/N/de = 2 \cdot p^{-1/2} (k \cdot T)^{-3/2} \cdot m^2 \cdot e^{-1/2} \cdot \exp(-e/k/T) \quad [26]$$

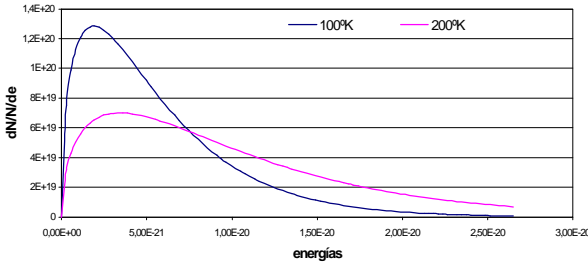
que es también una curva acampanada asimétrica, tal cual se ve en los gráficos siguientes.

Variación de la distribución de velocidades con la temperatura



Allí también se observa cómo se modifica la forma de la curva para un mismo gas cuando aumenta la temperatura. Disminuye la ordenada del máximo, y se corre su abscisa hacia mayores valores de velocidad. Se comprende que esto deba ser así ya que el área entre curva y eje de velocidades debe mantenerse constante, por representar la proporción total de moléculas, que es igual a la unidad.

Variación de la distribución de energías con la temperatura



Puede darse a las fórmulas [25] y [26] una interpretación conveniente considerando que son el producto de dos funciones independientes. Por ejemplo, pongamos la [25] como producto de dos corchetes:

$$dN/N/dv = [4 \cdot p \cdot v^2] \cdot [(2 \cdot k \cdot T/p \cdot m)^{-3/2} \cdot \exp(-m \cdot v^2/2kT)] \tag{27}$$

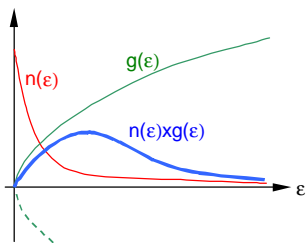
Ya vimos que el segundo corchete es la cantidad $n(\mathbf{v})$ de moléculas que tienen velocidad \mathbf{v} dentro de un casillero (en forma de caladura de sandía). En términos estadísticos representa la probabilidad de encontrar n moléculas de velocidad \mathbf{v} o de su correspondiente energía $e = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Se lo llama **probabilidad de ocupación de una celda**, y depende del tipo de partículas y de la temperatura absoluta de la masa de gas. Para extender esta probabilidad al espacio de las velocidades en módulo, (o al espacio de las energías cinéticas correspondientes) hubo que multiplicarlo por el factor $[4p v^2]$, que es la superficie de una esfera de radio v , y que extiende la probabilidad anterior a todos los estados posibles de igual velocidad. De allí que a este corchete se lo llame cantidad de celdas o **densidad de celdas**. Este factor de densidad, que representaremos en adelante con $g(\mathbf{v})$ o $g(e)$, es igual para todo tipo de partículas y no depende de la temperatura. Es un factor puramente geométrico en el espacio de las velocidades o energías, según se trate.

Cambiando la variable velocidad \mathbf{v} por energía $e = \frac{1}{2} m v^2$ la [27] se puede poner también en la forma:

$$dN/N/de = [4p \cdot \frac{2}{m} \cdot e^{-3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}] \cdot [1/\exp(A+e/kT)] = g(e) \cdot n(e) \tag{28}$$

para $4p \cdot v^2 \cdot dv = 4p \cdot \frac{2}{m} \cdot e^{-3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot de$ y $A = \ln [p \cdot m / (2 \cdot k \cdot T)^{-3/2}]$

Resumiendo: La función $f(e) = dN/N/de$ que representa estadísticamente la probabilidad de encontrar n moléculas entre energías e y $e+de$ se puede considerar como el resultado de dos probabilidades concatenadas:¹⁹

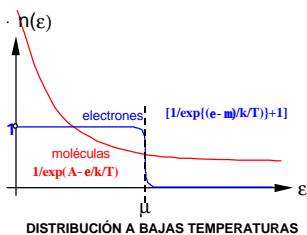


- probabilidad $g(e)$ de existencia de celdas con nivel de energía e (densidad de celdas). $g(e)$ es una parábola de eje coincidente con las abscisas.
- probabilidad $n(e)$ de que la celda esté ocupada (o que no esté vacía). $n(e)$ es una exponencial decreciente con asíntota en abscisas.

En un gas es alta la probabilidad de ocupación para bajas energías pero también escasa su densidad. A mayores velocidades, disminuye la probabilidad de ocupación y aumenta la densidad. El resultado del producto de las funciones de ocupación y densidad es la ya vista curva acampanada que parte del origen, crece hasta un máximo y se pierde en una cola asintótica.

Generalización del concepto de gas - Gases de fermiones y de bosones

El estudio estadístico hecho para gases moleculares puede extenderse a conglomerados de cualquier otro tipo de partículas que interactúen estadísticamente entre sí. Es el caso de los electrones libres dentro de un metal, neutrones dentro de una pila atómica, o fotones (cuantos de radiación) dentro de un horno. En cada caso deberán tenerse en cuenta propiedades particulares de cada partícula.



Gases de fermiones

A diferencia de las moléculas, que pueden ocupar un mismo casillero de energía sin límite de número, electrones, protones y neutrones se resisten a hacinarse dentro de un nivel de energía. Se dice que son partículas excluyentes²⁰.

Teniendo en cuenta la restricción de que no puede entrar más de una partícula por casillero, se deduce para ellas de manera análoga al caso de las

¹⁹ La probabilidad de que ocurran dos sucesos **independientes** en forma simultánea es el producto de las probabilidades de ocurrencia de cada uno de ellos

²⁰ La cuestión tiene que ver con el conocido **"principio de Exclusión de Pauli"** que rige para los electrones dentro del átomo, donde no puede haber más de uno por estado de energía.

moléculas la función de densidad de energía:

$$\frac{dN}{N \cdot de} = \frac{[4\pi \cdot \tilde{0}2 \cdot m^{-3/2} \cdot \tilde{0}e] \cdot [1/\exp\{(e- m)/k/T\})+1]}{\text{con } m = - A \cdot k \cdot T} = \frac{g(e) \cdot n(e)}{n(e) = [1/\exp\{(e- m)/k/T\})+1]} \quad [29]$$

Mientras que un gas de moléculas a temperaturas muy bajas posee casi todas las moléculas apiñadas en bajos niveles de energía, la fórmula anterior muestra que un gas de fermiones los tiene distribuidos a lo largo del eje de las energías en forma casi constante hasta una energía determinada **m**, a partir de la cual cae bruscamente a cero. Según esto, es de esperar que en los metales a bajas temperaturas exista una gran proporción de electrones de gran velocidad, a diferencia con la escasez de moléculas rápidas en un gas frío. En electrónica se conoce a la energía **m** como “potencial de Fermi”, propio de cada metal, en honor a Enrico Fermi (1901-1954), que junto con Paul Dirac (1902-1984) estudiaron la distribución de energías en un gas de partículas que como los neutrones y electrones, no pueden ocupar el mismo nivel de energía aún dentro de un mismo intervalo o casillero.²¹

A temperaturas elevadas (por ejemplo la ambiente, de 293 °K), un gas electrónico o neutrónico se parece mucho a un gas molecular, pudiéndose usar sin gran error la fórmula de Maxwell-Boltzmann, en vez de la de Fermi-Dirac, de la que daremos a continuación una breve deducción:

Distribución de Fermi-Dirac

Vimos que se aplica a partículas excluyentes e indistinguibles llamadas “fermiones”.

- Excluyentes significa que no pueden compartir el mismo estado de energía.
- Indistinguibles significa que no sólo son iguales entre sí, sino que no pueden individualizarse como bolillas en un bolillero, con un número distintivo. Esta cualidad surge de comparar el tratamiento estadístico entre moléculas y fermiones que haremos en seguida.

La distribución de energías de fermiones $f(\epsilon)$ viene dada, igual que para gases ordinarios, por el producto de la densidad de estados $g(\epsilon)$ y la probabilidad de ocupación $n(\epsilon)$. Mientras que $g(\epsilon)$ es igual para cualquier tipo de partícula, en la deducción de $n(\epsilon)$ para fermiones debe tenerse presente que hay $g(n)=g(e) \cdot de$ estados disponibles en un intervalo de energía **de**, en cada uno de los cuales se podrá acomodar una sola partícula, al contrario del caso de moléculas, que pueden acomodarse en cualquier número. Para calcular la probabilidad termodinámica de que en un casillero de energía ϵ_1 con g_1 estados posibles haya n_1 de un total de **N** moléculas (distinguibles) podemos configurar la complejión colocando la primera molécula elegida dentro de un total de **N**, la segunda de entre del resto, o sea (N-1), la tercera entre las (N-3) restantes, y así hasta llegar a (N-n+1). Esto configura una probabilidad compuesta igual al producto $N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \dots (N-n_1+1) = N! / (N-n_1)!$. A esto debe multiplicárselo por el factor $g_1^{n_1}$ que representa, como ya se vió, la cantidad de maneras en que pueden acomodarse n_1

²¹ Los “fermiones” se caracterizan por tener espines fraccionarios $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. Son fermiones los electrones, neutrones, protones y núcleos de masa impar (tritio, helio3, uranio 233, etc).

moléculas en g_1 estados, sin límite de número (recuérdese el ejemplo de cinco bolillas en dos casilleros que daba $2^5=32$). Por último hay que dividir por $n_1!$ que es el número de permutaciones entre elementos dentro de una misma complejión, que no aportan combinaciones diferentes aún siendo elementos distinguibles. Resulta así que las posibles maneras de colocar n_1 moléculas en g_1 estados es

$$P(n_1) = N! / (N - n_1)! \cdot g_1^{n_1} / n_1!$$

Las maneras de disponer n_2 moléculas de las restantes $(N - n_1)$ es

$$P(n_2) = (N - n_1)! / (N - n_1 - n_2)! \cdot g_2^{n_2} / n_2!$$

Id. para otro estado con n_3 moléculas restantes es

$$P(n_3) = (N - n_1 - n_2)! / (N - n_1 - n_2 - n_3)! \cdot g_3^{n_3} / n_3!$$

La probabilidad compuesta $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot P(n_3) \dots$ vale el producto $PP(i) = N! P g_i^{n_i} / n_i!$

Para hallar la configuración más probable se busca el máximo de una función que combine linealmente la probabilidad con condiciones de variación nula de cantidad de partículas y energía, a saber:

$F = \ln [PP(i)] + A \cdot [S n_i - N] + B [S(e_i \cdot n_i) - E]$, resolviendo $dF/dn = 0$ usando la ya vista aproximación de Stirling para el logaritmo natural del factorial $\ln(n!) \approx n \cdot \ln(n) - n$ resulta

$$F = \ln N! + S n_i \cdot \ln(g_i) - \ln(n_i!) + A \cdot [S n_i - N] + B [S(e_i \cdot n_i) - E]$$

$$dF/dn = S \{ d/dn [n \cdot \ln(g_i)] - d/dn [n_i \cdot \ln(n_i) - n_i] + A + B e \} =$$

$$= S \{ \ln(g_i) - 1 - \ln(n_i) + 1 + A + B e \} = 0$$

La condición que anula la suma de esta serie de términos de igual signo es que sean nulos cada uno de ellos. La anulación de un corchete genérico es, para todo i :

$$\ln(g_i) - \ln(n_i) + A + B e = 0 \text{ de donde } (g_i/n_i) = \exp(-A + B e)$$

Se llega así a $n(e) = g(e) / [\exp(A + B e)]$, que es la fórmula ya vista de Maxwell-Boltzmann

En el caso de los fermiones, todo pasa como si en cada casillero de energía e hubiera un número de $g(e)$ subdivisiones que pueden llenarse a lo sumo con una partícula. Hay g posibilidades de poner una cualquiera de las n partículas en el primer estado, $g-1$ posibilidades de poner la segunda partícula en el segundo, $g-2$ en el tercero y así sucesivamente hasta llegar a $g-n+1$ posibilidades para la última partícula de energía e . En total habrá $g \cdot (g-1) \cdot (g-2) \dots (g-n+1) = g! / (g-n)!$ posibilidades. Igual que para las moléculas, de ellas habrá que eliminar las que surgen de permutar los n elementos, ya que son equivalentes dentro de una misma complejión. Así la probabilidad termodinámica de una configuración con n_i fermiones en el casillero i es $P(i) = g_i! / (g_i - n_i)!$. La probabilidad de una configuración con $n_1, n_2, n_3 \dots$ elementos en casilleros con g_1, g_2, g_3 estados será el producto de $P(i)$, o sea $PP(i)$. Para hallar la configuración más probable se emplea el procedimiento ya visto, de encontrar el máximo de la función:

$F = \ln [PP(i)] + A \cdot [S n_i - N] + B [S(e_i \cdot n_i) - E]$, resolviendo $dF/dn = 0$, con el reemplazo aproximado $\ln(n!) \approx n \cdot \ln(n) - n$

$$\text{Entonces es } F = S \ln(g_i!) - \ln(g_i - n_i)! - \ln(n_i!) + A \cdot [S n_i - N] + B [S(e_i \cdot n_i) - E]$$

$$-dF/dn = S \{ d/dn [\ln(g_i!) - \ln(g_i - n_i)] + d/dn [n_i \cdot \ln(n_i) - n_i] - A - B e \} =$$

$$= S \{ (g_i - n_i) / (g_i - n_i) - \ln(g_i - n_i) + 1 + 1 + \ln(n_i) - 1 - A - B e \} = 0$$

Planteando la anulación de un corchete genérico para todo i resulta:

$$-\ln(g_i - n_i) + \ln(n_i) - A - B e = 0 \text{ de donde } (g_i - n_i) = \exp(A + B e)$$

Se llega así a $n(e) = g(e) / [\exp(A + B e) + 1]$, que es la fórmula válida para fermiones.

Fotones

La presión que la radiación electromagnética (luz, radiación térmica, etc.)

ejerce sobre la materia indujo al físico prusiano y premio Nobel 1911 **Wilhelm Wien** (1864-1928) a imaginar la evolución de esa masa de radiación siguiendo un ciclo de **Carnot** como el que realiza un gas molecular en el cilindro de un motor térmico. Dedujo así que el área de la curva de distribución de la energía debía ser proporcional a la **cuarta potencia** de la temperatura absoluta, que su máximo debía ser proporcional a la **quinta potencia**, y que ese máximo de la curva debía estar situado en energías proporcionales a dicha temperatura²². Esas características, probadas experimentalmente, se ajustaban a una distribución de energías tipo Maxwell-Boltzmann, como la de los gases de moléculas. Sin embargo, las curvas experimentales mostraban ciertas discrepancias para bajas energías, que estudiadas con inteligencia dieron origen nada menos que a la moderna **física cuántica**.

Fué en 1900, año en que **Max Planck** informó sobre sus trabajos que le valieron el premio Nobel 18 años más tarde. Se deduce de ellos que la luz y la radiación en general se emiten en forma de "**quanta**"²³ o paquetes discretos de energía $e=h.n$, siendo **h** una constante llamada "quantum de acción" o "**constante de Planck**", $n=c/l$ es la frecuencia de la radiación longitud de onda **l** y velocidad **c** (velocidad de la luz). El descubrimiento de Planck surge al ajustar la curva experimental de la densidad de energía espectral (véase el capítulo de Radiación Térmica, en nuestra obra "Óptica"), que requiere una función del tipo $f(e)=g(e)/[\exp(e/kT)-1]$. Nótese que **f(e)**, llamada distribución de Planck, es una función de **Maxwell-Boltzmann** modificada con un "menos uno" en el denominador, lo que precisamente permite el desarrollo en serie geométrica de la forma: $1/(1-r) = 1+r+r^2+r^3+\dots$ con $r=\exp(-hn/kT)$ y $e=h.n$. Los exponentes hv/kT , $2hv/kT$, $3hv/kT\dots$ sugieren escalones discretos, relacionados con una energía básica $h\nu$, que es la de un quantum.

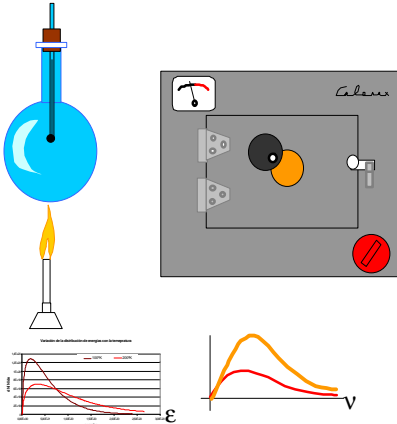
Albert Einstein recibió el premio Nobel de física en 1921 al descubrir que también la absorción de energía radiante se efectúa en forma discreta y no continua. Que la radiación se emita y se reciba en paquetes hace pensar en que también viaja con esa identidad discreta, constituyendo una partícula luminosa. Bautizados con el nuevo nombre de **fotones**, las viejas partículas luminosas que **Newton** había imaginado dos siglos antes cobraron así nueva vigencia. De acuerdo a la fórmula puesta de manifiesto por Einstein, la radiación tiene una masa electromagnética asociada **m** tal que su energía vale $E=m.c^2$. De allí surge que la cantidad de movimiento **m.c** asociada a un fotón de energía $E=h.n$ resulta ser hn/c .

²² Estas tres leyes se conocen respectivamente como ley de Stephan o de la cuarta potencia, ley de Wien de la quinta potencia y ley del desplazamiento del máximo de Wien. Se conocían experimentalmente antes de que la teoría termodinámica de la radiación las explicara.

²³ Plural de quantum, que significa cantidad en latín.

Los **fotones** poseen ciertas particularidades que los distinguen de otras partículas materiales como las vistas hasta ahora.

Comparemos un botellón de gas molecular y un horno caliente: Si aumentamos la



temperatura del botellón, sus paredes transmitirán energía cinética a las moléculas que chocan contra ellas, y poco a poco toda la masa de gas elevará su energía cinética media (léase temperatura). El número de moléculas se mantendrá constante, y un espectro de sus energías dará una curva menos puntiaguda, con el máximo corrido hacia energías más altas pero con igual área (proporcional al número total de moléculas). Ahora vayamos a nuestro horno. Las paredes del mismo están tapizadas de un número constante de osciladores cuyas energías obedecen a una

distribución de Maxwell-Boltzmann. En el equilibrio, reciben y emiten cuántos de radiación, manteniéndose en el interior un gas de ellos de número y composición aproximadamente constante. Aumentemos la corriente eléctrica que lo caldea. Las paredes pasarán del rojo al anaranjado, y el interior estará surcado por un gas de fotones que habrá aumentado en energía, como el gas de moléculas. Los fotones tienen velocidad constante y llevan una energía que se traduce en el color de su radiación asociada. Con el aumento de temperatura, el espectro de energías habrá cambiado de forma, con mayor proporción de partículas amarillas y menos rojas. Pero al mismo tiempo la curva encerrará una mayor área con el eje de frecuencias, lo que indica que no sólo la composición ha cambiado sino el número de fotones totales en la cavidad del horno ha aumentado. Se han generado en las paredes del horno nuevas partículas además de las que en el equilibrio llegan y son reemitidas.

Los fotones no poseen una identidad propia, es decir no son **distinguibiles** a la manera de bolillas numeradas. Su número no tiene porque permanecer invariable²⁴, pero al igual que las moléculas, pueden ocupar el mismo nivel de energía cualquier cantidad de ellos.

Se han descubierto modernamente muchas partículas subatómicas de spin entero (1,2...) como mesones, núcleos de masa par (helio 4) y gluones²⁵.que

²⁴ En las interacciones de fotones entre sí y con la materia se mantiene la energía pero no necesariamente el número de cuántos involucrados.

²⁵ Así como los fotones transmiten la fuerza electromagnética, los gluones (del inglés "glue", pegamento) transmiten las interacciones fuertes dentro de los constituyentes del núcleo atómico.

poseen estas características. Se llaman genéricamente **bosones**, en honor a **Satyendra Bose** (1894-1974), matemático y físico hindú que junto con A. Einstein elaboró la estadística apropiada a la fórmula de Planck, de acuerdo a los razonamientos que se dan brevemente a continuación.

Distribución de Bose-Einstein para fotones

A la fórmula de Planck $n(e) = g(e) / [\exp(Be)-1]$ se arriba por dos caminos: el original imaginado por Planck, considerando que los emisores de radiación (osciladores electromagnéticos en equilibrio) forman una población de elementos distinguibles que se distribuyen según la ley de Maxwell-Boltzmann. Como la emisión no es continua, aparece el término “-1” en la fórmula, que nos habla de un desarrollo en serie. El otro camino es imaginar la radiación misma como formada por un gas de ciertas partículas, cuyas propiedades deben satisfacer un razonamiento al estilo de los presentados para moléculas y electrones, y que arroje la fórmula con el famoso denominador modificado. Esas propiedades son:

- Pueden entrara sin límite de número en un nivel de energía
- Su número total no es constante, por lo tanto no debe plantearse ninguna condición que involucre a N
- Son indistinguibles como los fermiones, o sea que no pueden individualizarse al estilo de una molécula, como bolillas en un bolillero

Vimos que en un casillero de energía e se pueden colocar n elementos en g estados dentro de ese casillero de muchas maneras equivalentes. Si los elementos no son excluyentes pero sí distinguibles, como es el caso de las moléculas, se podrán poner de g^n maneras diferentes, dividido las permutaciones $n!$, y la probabilidad compuesta para un estado de contendrá el factor $N!$. Ahora bien, si los elementos son indistinguibles, como es el caso de los fotones y electrones, no tiene caso considerar como variantes las permutaciones entre el total N. En cambio un conjunto de n elementos indistinguibles y no excluyentes dentro de un intervalo de energía e con g estados funciona como una colección de dos tipos de partículas: los n elementos y los $g-1$ tabiques, permutables entre sí, que dan un número de combinaciones igual a $(n+g-1)!$. Las complejiones posibles no incluyen las permutaciones de los elementos, así que el número de casos distinguibles será $P(n)=(n+g-1)!/n!(g-1)!$

Para hallar la configuración más probable se emplea el procedimiento ya visto, de encontrar el máximo de la función $F = \ln [P(i)] + B [S(e_i, n_i) - E]$, en la que no interviene el término $A.[S(n_i, N)]$, ya que los fotones no mantienen su número total constante

Entonces es $F = S \ln(n_i+g_i-1)! - \ln(g_i-1)! - \ln(n_i!) + B [S(e_i, n_i) - E]$
 $dF/dn = S \{ d/dn[(g_i+n_i-1) \cdot \ln(g_i+n_i-1) - (g_i+n_i-1)] - d/dn[\ln(g_i-1)!] - d/dn[n_i \cdot \ln(n_i) - n_i] + B e_i \}$
 $= S \{ \ln(g_i+n_i-1) + 1 - \ln(n_i) + 1 - 1 + B \cdot e_i \} = 0$

Planteando la anulación de un corchete genérico para todo i resulta:

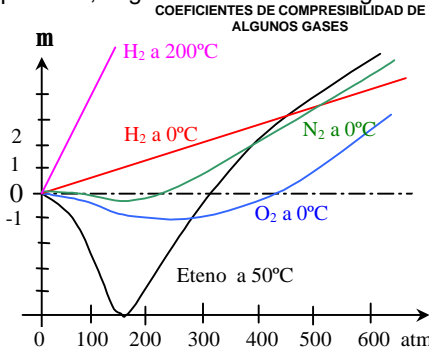
$\ln(g_i+n_i-1) - \ln(n_i) - B \cdot e_i = 0$ de donde $(g_i+n_i-1)/n_i = \exp(B \cdot e_i)$

Ya que número de partículas n partículas y densidad de estados g son ambos mucho mayores que 1, resulta $g+n-1 \approx g+n$ y entonces $g/n+1 = \exp(B \cdot e)$ de donde

Se llega así a $n(e)=g(e)/[\exp(B \cdot e)-1]$, que es la fórmula válida para fotones. Nótese que debido a que los fotones no mantienen su número constante, no aparece en esta fórmula la constante A que vimos en las otras estadísticas.

Gases reales

Los gases reales se apartan de la fórmula $pV=RT$. según se desprende de experiencias realizadas por los experimentadores franceses **Henri V. Regnault**, (1810-1878), **E.H. Amagat** (1841-....) y el irlandés **T. Andrews** (1813-1885). A temperatura constante el cociente $m=p.v/R/T$ no vale la unidad como en un gas perfecto. El cociente m se llama **coeficiente de compresibilidad**, y toma diferentes valores para cada gas según la presión y la temperatura, según se muestra en el gráfico adjunto.

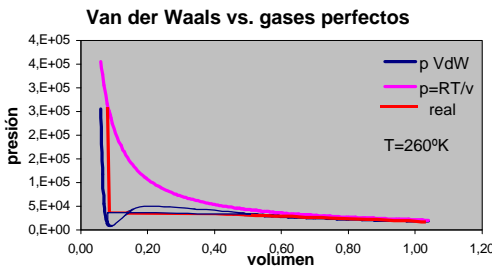


Además todos los gases pasan al estado líquido. Este cambio de estado se realiza a determinada presión, por debajo de una cierta temperatura llamada “crítica”, característica de cada gas.

Fórmula de Van der Waals

El físico holandés **Van der Waals** ganó el premio Nobel de física del año 1910 al proseguir sus trabajos de doctorado, “Sobre la continuidad del estado líquido y gaseoso”. Van de Waals se dió cuenta que un modelo que considerara el comportamiento real de los gases, en particular el **cambio de estado** debía corregir la suposición del modelo simplificado, válida sólo para pequeñas presiones, en el que a las moléculas no se asigna volumen computable frente a las distancias que las separa, y que no contempla otra acción que la del choque elástico entre partículas.

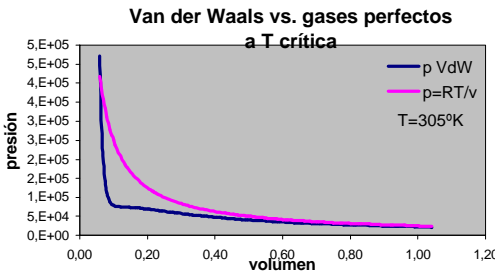
Así corrigió la ecuación de los gases ideales asignando a la presión un término aditivo a/V^2 que daba cuenta de la atracción entre moléculas con la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. También corrigió el volumen libre que ocupa el gas, restando de aquél el término b llamado **covolumen**, que representa el de las moléculas supuestas como pequeñas esferas incompresibles.



En vez de la ley de los gases ideales $p.v = n.R.T$, Van der Waals propuso

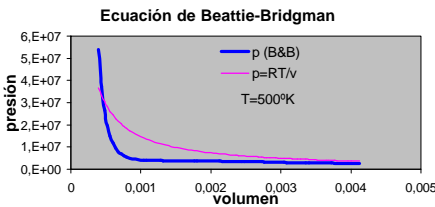
esta otra: $(p + a / v^2).(v - b) = n.R.T$. Las constantes **a** y **b**, que como dijimos tienen que ver respectivamente con la atracción intermolecular y el volumen ocupado por las moléculas, dependen lógicamente del gas en cuestión.

En la figura se representa para el CO₂ a 300 °K las curvas de presión en función del volumen del **gas real**, del **gas ideal** y del modelo de **Van der Waals**. Las tres son casi iguales para bajas presiones. A presiones altas el modelo ideal se aleja de la **evolución real**, que muestra una zona horizontal, correspondiente al **cambio de estado** de gas a líquido que se realiza a **presión constante**. La fórmula $p.v=n.R.T$ no da cuenta de ello, en cambio la de Van der Waals se acomoda sobre la recta, determinando dos zonas sombreadas a ambos lados de la misma cuyas áreas son iguales²⁶.



La experiencia demuestra que el cambio de estado no se realiza por encima de una cierta temperatura T_c llamada "crítica", característica de cada gas. La función de Van der Waals da cuenta de este fenómeno ya que para $T > T_c$ no

presenta la inflexión característica del cambio de estado. A temperaturas altas se acerca a la función para gases ideales.



Hay otras ecuaciones que representan aún con más exactitud el comportamiento de los gases reales. Son en general derivadas de la de Van der Waals, como la de Beattie-Bridgman²⁷, que usa cinco constantes particulares del gas en cuestión, a saber A, a, B, b, c , y que toma la forma:

$$p = \frac{RT(1 - \frac{c}{vT^3})}{v^2} \left[v + B(1 - \frac{b}{v}) \right] - \frac{A}{v^2} \cdot (1 - \frac{a}{b})$$

²⁶ En el diagrama presión-volumen el área representa energía. Las áreas iguales que determinan la función de Van der Waals y la recta real representan una evolución de trabajo nulo en la zona de cambio de estado, que condice con la realidad.

²⁷ Bridgman, Percy Williams (1882-1961), físico norteamericano, premio Nobel de

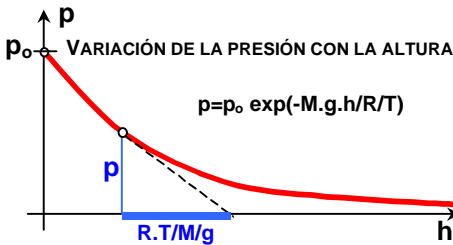
En la figura se representa la ecuación de **Beattie-Bridgman** para CO_2 a 500°K , comparada con la de los **gases perfectos**.

Presión en gases creada por campos gravitatorios o inerciales

Una masa de gas sometida a la acción de la gravedad²⁸ presenta una variación de la presión con la altura que no es lineal como en el caso de los líquidos incompresibles, porque su densidad depende de la presión debido precisamente a su compresibilidad.

La densidad, cociente de la masa y el volumen **V** ocupado, responde para **n** moles de un gas ideal de peso molecular **M** a la fórmula $d=n.M/V$, y ya que $p.V=n.R.T$ es $d=p.M/R.T$. A temperatura constante, la densidad es proporcional a la presión. El principio general de la hidrostática $p=h.d.g$ puede aplicarse a un pequeño aumento de nivel **dh**, que causará una pequeña variación de presión $dp=-d.g.dh$, con $d=p.M/R.T$, entonces será $dp/p=-M.g/R.T.dh$, o sea $\ln(p) = -M.g/R.T.h + K$.

Cuando la altura es la del nivel del mar $h=0$ es $p=p_0$ y la constante de integración es $K = \ln(p_0)$ de donde $p=p_0 \exp(-M.g.h/R.T)$



Asimismo, teniendo en cuenta que $M=N_A.m$ (m = masa de una molécula) y $R/N_A = k$ (constante de Boltzmann) podemos poner que $p=p_0.\exp(-m.g.h/k.T)$

Ya que al densidad es función de la presión ($d=-dp/dh/g = M/R.T.p$), su variación será también exponencial decreciente, lo que indica que una

masa de gas sometida a un campo (de gravedad o aceleración) se extiende sin límites, aunque cada vez más tenue. Nótese que $m.g.h$ es la energía potencial de una molécula a la altura h . De acuerdo al modelo cinético, en un gas siempre habrá algunas moléculas con energía cinética suficientemente alta como para llegar a cualquier altura h

Ejemplo: ¿Cuál será la presión atmosférica a 10 Km de altura sobre el nivel del mar?

Datos:

Considerar la temperatura constante con la altura $T=273 \text{ }^\circ\text{K}$; M del aire $=0,7.28+0,3.32=29,2 \text{ g/mol}$; $R=8,31 \text{ J}^\circ\text{K/mol}$; $g=9,8 \text{ m/s}^2$ Tomar la presión al nivel del mar $p_0= 101300 \text{ N/m}^2$

física 1946 por sus trabajos sobre altas presiones.

²⁸ En este desarrollo no se considera la variación de la gravedad con la altura, y proponemos al lector que evalúe el error cometido.

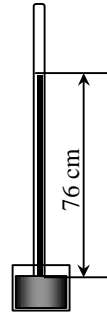
$$p = p_0 \exp(-M \cdot g \cdot h / R \cdot T) = p_0 \cdot \exp(-0,0292 \cdot 9,8 \cdot 10000 \text{ m} / 8,31 \text{ J}^\circ\text{K} / \text{mol} / 273 \text{ }^\circ\text{K}) = 0,283 \cdot p_0 = 28666 \text{ N/m}^2$$

Presión atmosférica

La presión **p** que existe a la altura **h** está producida por el peso de la masa de gas de la atmósfera que está por encima. la que se extienda sin límite de altura, como ya se vió. Se llama presión atmosférica y a nivel del mar su valor promedio es de 101300 N/m². La unidad de presión es 1 N/m² = 1 Pascal (en honor al sabio francés que estudió la presión en flúidos).

Experiencia de Torricelli

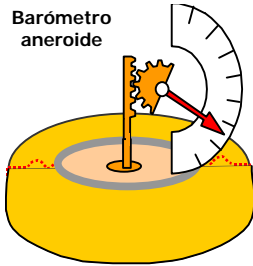
El físico y matemático italiano **Evangelista Torricelli** (1608-1647), contemporáneo de Galileo, realizó por primera vez una experiencia para poner de manifiesto y medir la presión atmosférica. Llenó un tubo de 1 metro con mercurio, lo tapó con el dedo y lo invirtió sobre una cubeta llena del mismo metal líquido. Cuando sacó el dedo, el mercurio bajó de nivel en el tubo hasta aproximadamente 760 mm por sobre el nivel libre de la cuba. Torricelli explicó el hecho admitiendo que la presión atmosférica que se ejercía sobre la superficie libre del mercurio de la cuba sostenía el peso del mercurio en el tubo. El espacio por sobre el nivel del mercurio en el tubo está vacío, es decir que no hay nada que ejerza presión allí, por lo que ésta será cero²⁹. De acuerdo al teorema fundamental de la hidrostática a nivel de la cuba la presión será la que existe en el nivel superior del mercurio, o sea cero, más la altura de la columna por el peso específico del mercurio, o sea 0,76 m x 13600 Kg/m³ x 9,8 m/s² = 101293 N/m²



Los meteorólogos miden la presión atmosférica en hectopascales (hPa), esto es cientos de N/m². Su valor oscila al nivel del mar desde 1000 hPa (tempestad) hasta 1100 hPa (muy estable).

Antes que se popularizara el seguimiento y predicción del tiempo con rastreos satelitales y cuando las transmisiones de registros desde estaciones remotas no eran seguras, el estudio de la variación de la presión atmosférica era un precioso instrumento para la **predicción del tiempo**. Una disminución brusca es presagio de tempestad. Un aumento paulatino indica una temporada de buen tiempo. Una disminución sostenida y lenta indica lluvia sin tempestad. Estos criterios generales pueden modificarse de acuerdo al lugar.

²⁹ De paso advirtamos que cuando absorbemos líquido con una bombilla éste sube impulsado por la presión atmosférica. Aunque pudiéramos hacer un vacío perfecto al chupar, el líquido no subiría más de un cierto nivel que depende de la presión atmosférica. Para el agua el máximo teórico es de 10,33 m ¿Por qué?



Barómetros

Son aparatos para medir la presión atmosférica. El de mercurio es un aparato como el de Torricelli, fijo sobre un soporte y con una regla adosada. Para compensar la variación del nivel de la cuba, se lo enrasa con el cero de la regla móvil, bien moviendo ésta o desplazando el fondo flexible de la cuba. Aparatos más manuales y portátiles, aunque menos precisos, son los que amplifican las deformaciones de cajas flexibles dentro de las

cuales se ha practicado el vacío, y que por lo tanto se achatan más o menos con las variaciones de presión atmosférica. Estos aparatos se calibran con uno de mercurio.

Ejemplo: Cuando sale del campamento base, el andinista Manolo se fija en su anerode de bolsillo, que marca 980 HPa. Al cabo de una hora, nuestro amigo hace un alto y consulta nuevamente su aparato, que ahora acusa 910 HPa . Después de beber de su cantimplora, se sienta en una roca, saca una calculadora y un anotador y efectúa los siguientes cálculos (estima que la temperatura se mantuvo en 5°C)

$$p_1 = p_0 \exp(-M \cdot g \cdot h_1 / R \cdot T) \text{ de donde } \ln(p_1/p_0) = -M \cdot R / T \cdot g \cdot h_1 \text{ y entonces } h_1 = -\ln(980/1013) \cdot R \cdot T \cdot M / g = 0,0331 \times 8,31 \times 268 / 0,0292 / 9,8 = 258 \text{ m}$$

$$p_2 = p_0 \exp(-M \cdot g \cdot h_2 / R \cdot T) \text{ de donde } \ln(p_2/p_0) = -M \cdot R / T \cdot g \cdot h_2 \text{ y entonces } h_2 = -\ln(910/1013) \cdot R \cdot T \cdot M / g = 0,107 \times 8,31 \times 268 / 0,0292 / 9,8 = 834 \text{ m}$$

Restando 834-258 Manolo deduce que subió 576 m, lo que por otra parte podría haber deducido haciendo $p_1 - p_2 = \exp[Mg/R/T(h_2 - h_1)]$

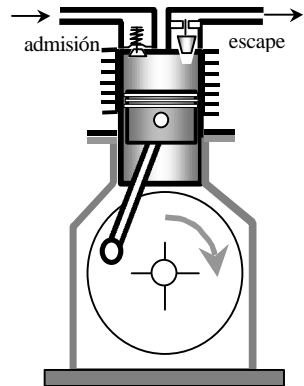
$$\text{de donde } \ln(p_1 - p_2) = M \cdot g / R \cdot T \cdot (h_2 - h_1) \text{ y entonces } \Delta h = \ln(980-910) \cdot R \cdot T / M / g = 576 \text{ m}$$

Discutir el error de cálculo que hubiera producido un cambio de 10 HPa en la presión atmosférica durante la ascensión.

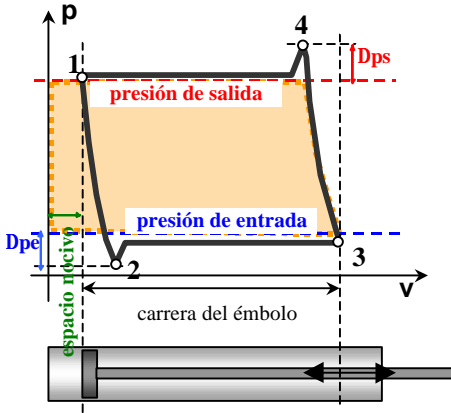
Bombas y compresores

Para extraer el aire de recintos cerrados o para comprimirlo en depósitos, se emplean aparatos denominados genéricamente como bombas, de vacío o de compresión respectivamente. El más común es la bomba de émbolo, que aspira durante la carrera del pistón hacia el extremo abierto del cilindro y expelle durante la carrera en sentido contrario, hacia el extremo cerrado del cilindro, donde existen dos válvulas de entrada y salida respectivamente

Cuando el pistón baja, la diferencia de presión entre el exterior y el interior vence el resorte de la válvula de entrada o admisión. La válvula de salida o escape se mantiene cerrada por su propio peso, por la pre-



sión de un muelle ligero o por la contrapresión del gas comprimido en el depósito a la salida, en el caso de compresores. Cuando el pistón sube, el resorte y la presión interior cierra la válvula de admisión. Cuando éste sube lo suficiente, la presión en el cilindro vence el peso y la contrapresión sobre la válvula de salida, que deja salir el gas hacia el exterior o hacia el depósito.



Este aparato tiene un rendimiento limitado por los siguientes factores:

- El espacio que queda entre el cilindro y la cara superior del pistón cuando éste está en su posición más alta. Se llama **espacio nocivo**, y se trata de hacer lo menor posible por las razones que se expondrán en seguida.
- La diferencia de presión para vencer el cierre de la válvula de admisión y la necesaria para abrir la de escape.

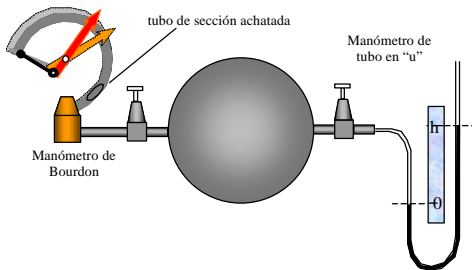
- Las fugas creadas por cierre imperfecto de válvulas y pérdida en los aros del cilindro.

Tratemos de seguir el funcionamiento de una bomba-compresor en un diagrama presión-volumen. El ciclo real comienza en 1 (trazo en gris) desde donde se expande el gas contenido en el espacio nocivo hasta que la presión en el interior es inferior en Dp_e a la presión en el recinto o la atmósfera, según funcione como bomba de vacío o compresor respectivamente³⁰. Esta diferencia es necesaria para que se abra la válvula de entrada y en el interior del cilindro penetre el gas hasta el extremo de la carrera en 3. La evolución 2-3 se realiza a presión constante ligeramente menor que la del recinto a evacuar, en el caso de una bomba de vacío, o la atmósfera cuando funciona como compresor, porque hay pérdida de presión por rozamiento del gas en la válvula y conducto de entrada. Desde allí el gas se comprime en el cilindro hasta 4, donde se abre la válvula de salida que comunica con la atmósfera, en el caso de una bomba de vacío, o con el depósito de gas comprimido en un compresor. Esto se logra a una sobrepresión Dp_s necesaria par vencer el peso de la válvula. El pistón barre luego el tramo desde 4 hasta 1. También esta evolución 4-1 se realiza a una presión constante ligeramente superior a la de salida, por los rozamientos del gas en válvula y conductos de salida. Si no hubiera espacio nocivo, los conductos y las válvulas no presentarían rozamiento al paso del gas y las válvulas no necesitarían energía para abrir y cerrar, el ciclo sería el marcado en amarillo. En el caso de una bomba de vacío,

³⁰ Las evoluciones 1-2 y 3-4 se realizan en forma adiabática, esto es sin intercambio de calor con el exterior. Veremos al estudiar principios de termodinámica que tales evoluciones "adiabáticas" tienen una ecuación del tipo $p \cdot v^n = \text{constante}$, con $n = c_p/c_v$ (coeficiente entre calores específicos a presión y volumen constantes)

a medida que se suceden los ciclos, la presión en el recinto va disminuyendo hasta que la diferencia de presión entre éste y el cilindro no es capaz de abrir la válvula de entrada. En cambio, en el caso de un compresor, la presión de salida es la que va en aumento hasta que debido al espacio nocivo, la presión dentro del cilindro no sube lo suficiente como para vencer la contrapresión que el gas del depósito ejerce sobre la válvula de salida.

Manómetros



Son aparatos que sirven para medir la presión de fluidos (gases o líquidos).

Manómetros de tubo en U

El manómetro más simple y exacto consiste en un tubo en “U” lleno de un líquido de densidad conveniente, que no reaccione químicamente con

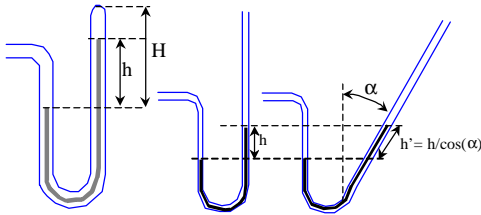
el gas. Uno de los extremos se conecta al recinto donde se quiere medir la presión y el otro se deja al aire. El manómetro de “tubo en u” posee una regla desplazable para medir la diferencia de niveles entre la superficie del líquido en comunicación con el recinto y la superficie libre (a la presión atmosférica). Esa diferencia de niveles o altura, multiplicada por el peso específico del líquido que llena el manómetro nos da la presión en el recinto con respecto a la atmosférica. A esta presión se la llama “**relativa**”. Si le sumamos la presión atmosférica se obtiene la **presión absoluta**. Haciendo las ramas de longitud adecuada, estos aparatos miden presiones tanto mayores como menores que la atmosférica. La presión menor que la atmosférica se toma generalmente de signo negativo. Los manómetros dispuestos para medir depresiones o “vacíos” se llaman “vacuómetros”. El líquido de mayor densidad que se conoce es el mercurio³¹ ($\delta=13600 \text{ Kg/m}^3$). Con un tubo en u de 1 m de altura se pueden medir presiones relativas hasta $13600 \times 1 \times 9,8 = 133280 \text{ N/m}^2$.

Manómetros cerrados de tubo en u

Si el extremo del tubo es cerrado queda allí confinada una porción de gas que se comprime al subir la columna y se dilata al bajar ésta. Los manómetros de tubo cerrado que encierran una masa m de gas en un volumen v a la temperatura absoluta T miden una presión $p = h \cdot d \cdot g + m \cdot R_G \cdot T / v$. Considerando que el volumen encerrado en un tubo de radio r y altura $H-h$ es $v = \pi \cdot r^2 \cdot (H-h)$ resulta que $p = h \cdot d \cdot g + m \cdot R_G \cdot T / \pi r^2 (H-h)$. La escala no es lineal sino hiperbólica, con divisiones cada vez más juntas³².

³¹ El mercurio emite vapores tóxicos aún a temperatura ambiente. Se debe evitar su inhalación prolongada.

³² Téngase en cuenta que en los manómetros de tubo cerrado la lectura debe corre-



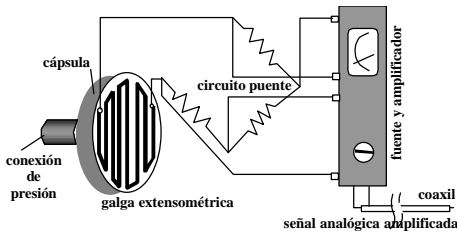
Para aumentar la sensibilidad de un manómetro de tubo en U puede inclinarse el tubo de medición en un ángulo α con respecto a la vertical. En tal caso la escala queda multiplicada por $1/\cos(\alpha)$

Manómetros tipo Bourdon

Cuando el servicio no permite tubos frágiles de vidrio de grandes dimensiones y se requieren indicaciones visibles y lecturas rápidas, se emplean los manómetros tipo **Bourdon**, que constan de un tubo metálico curvado, de sección achatada (para aumentar su flexibilidad) , que tiende a enderezarse por efectos de la presión interior. La pequeña deformación es amplificada mecánicamente con un sistema de bielas articuladas o de engranajes que mueven una aguja sobre un cuadrante. Se gradúan por comparación con aparatos patrones.

Manómetros de galga extensométrica

Una cinta conductora delgada pegada en zig-zag sobre una membrana que se comba por la presión aumenta su resistencia eléctrica por el alargamiento que sufre al flexionarse la membrana soporte. Formando parte de un puente de Wheatstone este aparato transforma presión en señal eléctrica.



El conjunto conectado a un amplificador adecuado es apropiado para detectar cambios de presión muy rápidos (más de 5000 Hz) debido a su escasa inercia mecánica y gran sensibilidad. Se lo conoce como “galga extensométrica” o en inglés strain gauge.

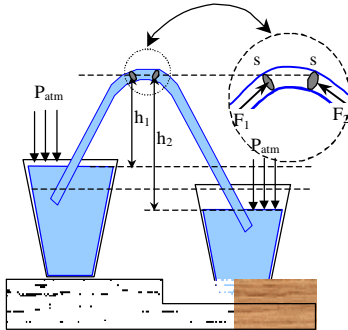
Manómetros piezoeléctricos.

Se basa en el mismo principio que el micrófono de cristal, es decir la aparición de una diferencia de potencial sobre las caras opuestas de un cristal (por ejemplo cuarzo) sometido a compresión. La salida, de exigua potencia, se amplifica convenientemente para obtener una señal conveniente. Los manómetros piezoeléctricos tienen una respuesta a frecuencia muy elevada, que puede llegar al orden del MHz, debido a la exigua inercia de sus órganos móviles y a la pequeñez de las deformaciones.

[girse por temperatura del gas encerrado en la cámara.](#)

Sifón

Es un dispositivo conocido desde muy antiguo para transvasar líquidos.



Experiencia: Se colocan dos baldes con agua a diferentes alturas. De un tubo (rígido o flexible) lleno de líquido, se tapan ambos extremos para que no se vacíe y se sumergen en cada balde. Al destapar los extremos se establece una corriente a través del tubo desde el recipiente cuya superficie está a mayor nivel hacia el otro. El pasaje cesa cuando se igualan los niveles en ambos depósitos.

Explicación: Consideremos una porción de líquido en la parte más alta del tubo, como si fuera un pistón limitado por dos superficies s iguales y próximas. La de la izquierda recibirá una fuerza $F_1 = [P_{atm} \cdot h_1 \cdot d \cdot g] \cdot s$ y la de la derecha una fuerza en contra $F_2 = [P_{atm} \cdot h_2 \cdot d \cdot g] \cdot s$. De la desigualdad entre ambas ($F_1 > F_2$), surge que el pistón líquido se moverá de izquierda a derecha debido a la diferencia de presión $DP = (h_2 - h_1) \cdot d \cdot g$

Cuestión: Discútase la posibilidad de transvasar mercurio con un sifón cuando $h_1 > 76$ cm

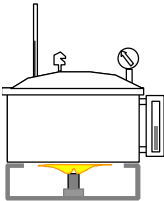
Equilibrio líquido-vapor

Puede considerarse a un líquido como una masa de moléculas en movimiento con una energía promedio inferior a la que las mantiene juntas (fuerza de cohesión de Van der Waals). Algunas de las moléculas superficiales poseen dentro de esa distribución estadística de energía, la suficiente como para vencer la cohesión, saltando afuera de la masa líquida. Constituyen así un gas llamado vapor, que está en equilibrio con el líquido del cual provienen. Aumentando la energía del sistema aumenta la proporción de moléculas en forma de vapor en un proceso de cambio de estado llamado evaporación. El proceso de evaporación (se requiere que coexistan las fases de vapor y líquido) se produce a una presión de vapor que es propia del líquido a la temperatura del sistema.

Todos los líquidos emiten vapores en mayor o menor medida, dependiendo ésta de esa energía característica que tiende a mantener juntas a las moléculas en forma líquida. Esta característica es la volatilidad propia de cada sustancia, y se mide por la presión de vapor en función de la temperatura del sistema.

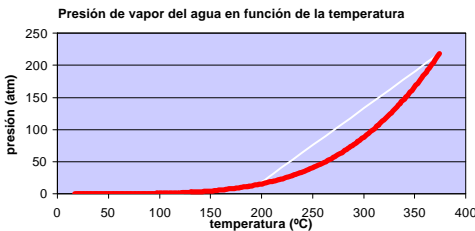
Asimismo, es posible considerar al gas como un vapor, ya que como vimos, todo gas puede licuarse o “condensarse” (en un proceso inverso al de la evaporación) con la presión adecuada y a una temperatura suficientemente baja como para se produzca la agregación de moléculas en forma de líquido. Se dijo también que por encima de una temperatura crítica para cada sustancia, la condensación no se produce y las fases de vapor o líquido son indistinguibles.

Por ejemplo, el agua tiene una presión de vapor que iguala a la atmosférica normal (101300 N/m²) a la temperatura de 100°C. En tales condiciones, la energía suministrada al sistema se emplea en generar más vapor a costa del líquido, sin aumento de temperatura. Este cambio de estado a temperatura constante (ebullición) continúa hasta que la fase líquida se evapora totalmente. A partir de ese punto el vapor supera la temperatura de 100°C en la medida que reciba energía exterior. A la temperatura crítica de 374 °C el agua líquida coexiste en un estado indistinguible con su fase vapor a la presión de 22,08x10⁶ N/m² (doscientas dieciocho veces la presión atmosférica). La densidad del sistema en esas condiciones es de 554 Kg/m³ (poco más de la mitad de la densidad del agua líquida en condiciones normales).



Lo anterior puede comprobarse con un recipiente con tapa hermética de volumen **V[m³]** construido para soportar presión elevada, provisto de un manómetro, un tubo de nivel, un termómetro y una válvula de seguridad. Se lo carga con agua pura y se deja un buen rato en ebullición el agua con la válvula de seguridad abierta para que el vapor desaloje al aire. Luego se repone la válvula. Consideremos, por ejemplo, que disponemos de un recipiente a presión de 1 litro (0,001 m³).

Se lo deberá cargar con una masa algo superior a 0,554 Kg de agua, para que sea ésta la que quede después del proceso de desaireación. Con el agua a la temperatura **T** el manómetro marcará la presión de vapor



p(T) del agua a esa temperatura. A medida que calentemos el sistema, irá subiendo la temperatura y la presión según una curva como la que indica la figura ³³. El nivel del líquido en el interior irá disminuyendo, hasta que al llegar a la temperatura de 374 °C,

habrá desaparecido todo el líquido del sistema. El manómetro marcará entonces 218 atmósferas. Si el vapor de agua fuera un gas perfecto y no un vapor en el punto crítico, tendría en estas condiciones una presión de:

$$p = n \cdot R \cdot T / v = 554 / 18,8 \cdot 3 \cdot (273 + 374) / 0,001 = 165280000 \text{ N/m}^2 = 1631 \text{ atm}$$

³³ Según se verá, se deduce teóricamente que T debe variar logarítmicamente con la presión (Véase Ecuación de Clapeyron-Clausius)

FÍSICA GENERAL
ÍNDICE TEMÁTICO DE LA TERCERA PARTE
ESTÁTICA – RESISTENCIA DE MATERIALES - GASES

PRINCIPIOS DE ESTÁTICA Y RESISTENCIA DE MATERIALES	95
Equilibrio del cuerpo rígido sometido a fuerzas	95
Estabilidad de sistemas cargados	96
Estática	96
Vínculos	96
Grados de libertad	97
Principio de los trabajos virtuales	99
Rozamiento	100
Rozamiento de deslizamiento	100
Caída por un plano inclinado	101
Rozamiento entre muñón y cojinete sin lubricación	102
Rozamiento de rodadura	103
Trabajo de las fuerzas de rozamiento	103
Equilibrio de cuerpos elásticos sometidos a esfuerzos	105
Caso de cargas distribuidas	107
Deformación de la materia debida a esfuerzos	108
Ensayos de materiales	108
Ley de Hooke	109
Flexión	110
Deformación del eje de una viga sometida a flexión.	
Línea elástica. Flecha máxima	111
Corte	113
Torsión	114
MECÁNICA DE LOS FLUÍDOS	115
Flúidos	115
Generalidades	115
Hidrostática	116
Presión en un punto de una masa fluída	116
Teorema general de la hidrostática	116
Vasos comunicantes	118
Principio de Arquímedes	119
Cuerpos flotantes	119
Estabilidad de cuerpos flotantes - Metacentro	119
Algunas consecuencias del teorema general de la hidrostática	120
Algunas máquinas hidráulicas:	121
Balanza hidrostática de Mohr	122
Neumostática	123
Gases – generalidades	123
Ecuación de estado de gases ideales	123
Termómetros absolutos	123
La teoría cinética de los gases	125

Presión sobre las paredes del recipiente	125
Energía cinética media de las moléculas	126
Distribución de las velocidades	127
Modelo de Boltzmann – Estado y complexión.....	129
Deducción de la ley de distribución de velocidades.....	131
Relación entre velocidades estadísticas y temperatura	137
Generalización del concepto de gas - Gases de fermiones y de bosones	139
Gases de fermiones	139
Distribución de Fermi-Dirac	140
Fotones.....	141
Distribución de Bose-Einstein para fotones	144
Gases reales	145
Fórmula de Van der Waals	145
Presión en gases creada por campos gravitatorios o inerciales	147
Presión atmosférica	148
Experiencia de Torricelli	148
Barómetros.....	149
Bombas y compresores	149
Manómetros	151
Manómetros de tubo en U.....	151
Manómetros cerrados de tubo en u.....	151
Manómetros tipo Bourdon	152
Manómetros piezoeléctricos.	152
Sifón	153
Equilibrio líquido-vapor.....	153

ÍNDICE ALFABÉTICO DE LA TERCERA PARTE

- acero**, 109
 adherencia (fluidos), 115
 agua (presión de vapor), 154
alabeados (vectores), 96
Amagat (gases), 145
Andrews (gases), 145
 aplastamiento, 108
apoyo articulado, 97
apoyo móvil o deslizante, 97
Arquímedes de Siracusa, 119
articulación o apoyo fijo, 96
 atracción intermolecular, 146
Avogadro, Amadeo, 125
 balanza hidrostática de Mohr, 122
 barómetro anerode, 149
 barómetros, 149
 Beattie-Bridgman, 146
Bernoulli, Daniel, 125
 bismuto, 128
Boltzmann, 125
 Boltzmann, 129
 bomba de émbolo, 149
 bombas y compresores, 149
Bose, Satyendra, 144
bosones, 144
 bosones (gases), 139
 Boyle (Robert), 123
bronce, 109
caladura de sandía, 134
cambio de estado, 146
cambio de estado (gases), 145
 campana de Gauss, 134
campo potencial, 108
caos (gases), 125
capa neutra (viga), 110
carga distribuida en una viga, 107
 Celestino (operario), 99
 centro de empuje, 120
Charles, 124
 choques moleculares (gases), 125
 ciclo de Carnot (gas de fotones), 142
 ciclo de un compresor de émbolo, 150
coeficiente de compresibilidad (gases), 145
coeficiente de rozamiento (tabla), 101
 cohesión (fluidos), 115
cojinete, 102
 complexión (arreglo), 129
 compresibilidad, 147
 compresibilidad e incompresibilidad, 117
 condensación, 154
 constante de Boltzmann, 137, 147
 constante de los gases R, 124
constante de Planck, 142
 continuos (fluidos), 116
 convención de signos (momento), 106
 coordenadas cartesianas, 134
 coordenadas esféricas, 134
corte (viga), 105
covolumen, 145
cuarta potencia (ley de la), 142
cuerpo rígido, 97
 cuerpos flotantes, 119
cupla, 95
De Moivre, Abraham, 131
deformación permanente, 108
 deformación por **esfuerzo de corte**, 109
 deformación por esfuerzos, 108
densidad de celdas, 138
 densidad de energía espectral, 142
densidad de número de moléculas, 133
 densidad de velocidades, 135
 desarrollo en serie geométrica, 142
 desgarramiento, 108
 diagramas de presiones, 119
 Dirac, Paul, 140
disipación de calor (rozamiento), 104
distinguibles (partículas), 143
 distribución de Bose-Einstein, 144
 distribución de las velocidades, 127
 distribución de Maxwell-Boltzmann (osciladores), 143
 distribución de Planck, 142
 distribución de velocidades (forma), 127
distribución estadística (velocidades), 125
doble T (sección), 113
 ecuación de Boyle-Mariotte, 123
 ecuación de estado (gases), 123
Einstein, Albert, 142
empotramiento, 97
 empuje hidrostático, 119

- energía cinética de las moléculas, 126
energía interna, 103, 108, 125
energía mínima, 99
energía potencial de forma, 115
engrane y desengrane (rodadura), 103
ensayo de materiales, 108
equilibrio de cuerpos elásticos, 105
equilibrio del cuerpo rígido, 95
equilibrio en reposo, 96
equilibrio estático, 95
equilibrio **indiferente**, 98
equilibrio **inestable**, 98
equilibrio líquido-vapor, 153
escala termométrica, 123
esfuerzo de corte, 106, 113
esfuerzo y alargamiento (relación), 108
esfuerzos de corte (fluídos), 115
espacio nocivo, 150
estabilidad de cuerpos flotantes - metacentro, 119
estado (gas), 129
estática, 95, 96
estiramiento, 108
estrechamiento por tracción, 108
evaporación, 153
evolución real (gases), 146
excluyentes (partículas), 140
experiencia de Torricelli, 148
experiencia de Zartman, 127, 133
Fermi, Enrico, 140
Fermi-Dirac, fórmula de, 140
fermiones, 140
fermiones (gases), 139
física cuántica, 142
flecha, 112
flecha (viga), 111
flexión, 110
flexión (viga), 105
fluencia (estado), 108
fluídos, 115
fluídos ideales, 115
fórmula de Maxwell-Boltzmann, 140
fórmula de Stirling -De Moivre, 132
fórmula de Van der Waals, 145
fortalecimiento, 108
fotones, 141, 143
frenos hidráulicos, 121
fricción, 100
fuerzas de rozamiento, 103
gases (generalidades), 123
gases de fermiones, 139
gases reales, 145
gases y vapores, 154
Gay-Lussac, José, 124
gluones, 143
grados de libertad, 97
gráfico de esfuerzo de corte, 106
gráfico de momento flector, 106
gráficos de carga, 106
helio, 143
hidrodinámica, 103, 116
hidrostática, 116
Hooke (Robert), 109
hormigón, 109
hormigón (resistencia del), 109
horno caliente (fotones), 143
indistinguibles (fases líquido/vapor), 154
indistinguibles (partículas), 140
interacciones entre moléculas (gas), 129
isostáticos e hiperestáticos (sistemas), 98
Bernoulli, 125
ley de distribución de velocidades, 131
ley de Hooke, 109
ley de Stephan. Véase cuarta potencia (ley de)
ley del desplazamiento (Wien), 142
límite de proporcionalidad, 108, 111, 113
línea elástica, 111
lubricación, 103
madera, 109
madera (resistencia de la), 109
Manolo (andinista), 149
manómetros, 151
manómetros de galga extensométrica, 152
manómetros de tubo en U, 151
manómetros piezoeléctricos, 152
manómetros tipo Bourdon, 152
máquina de ensayos, 108
máquinas hidráulicas, 121
Mariotte (Edmundo), 123
máxima probabilidad, 130, 131
Maxwell, 125
Maxwell-Boltzmann, 141

- Maxwell-Boltzmann (distribución de velocidades), 128
- mecánica de los fluidos, 115
- mercurio, 148
- mesones, 143
- metacentro**, 120
- modelo de Boltzmann, 129
- módulo de elasticidad, 109
- módulo de torsión**, 110
- momento**, 95
- momento de inercia (sección)**, 113
- momento de traslación, 96, 105
- momento flector**, 105, 107
- momento flector máximo (viga), 110
- muñón, 102
- muñón y cojinete (rozamiento), 102
- neumostática, 123
- Newton, 109, 142
- Número de Avogadro, 137
- par de fuerzas**, 95
- Pascal (unidad), 148
- pegamento (viga), 105
- Planck, Max**, 142
- plano inclinado, 101
- plano inclinado (equilibrio), 99
- polígono funicular**, 106, 107
- predicción del tiempo**, 148
- prensa hidráulica**, 121
- presión (fluidos), 116
- presión absoluta**, 151
- presión atmosférica, 148
- presión de los gases (origen)**, 125
- presión de radiación**, 141
- presión de vapor, 153
- presión del gas (teoría cinética), 125
- presión relativa**, 151
- presión y gravedad, 147
- principio de Arquímedes, 119, 121
- principio de los **trabajos virtuales**, 99
- probabilidad de ocupación**, 138
- probabilidad termodinámica**, 131
- promedio vectorial de velocidades, 129
- proporción de moléculas**, 135
- proporcional (deformación)**, 108
- puente de Wheatstone (galga), 152
- quanta**, 142
- quinta potencia (ley de la)**, 142
- reacciones de vínculo**, 97
- recuperación de forma**, 108
- Regnault (gases)**, 145
- resbalamiento**, 100
- resistencia a la tracción, 109
- resistencia de materiales, 95
- resistencia de materiales (Tabla)**, 109
- resultante**, 95
- rodadura (rozamiento)**, 100
- rótula**, 97
- rotura por esfuerzos**, 108
- rozamiento, 100
- rozamiento de deslizamiento, 100
- rozamiento de rodadura, 103
- rozamiento soga-polea, 104
- saturado (vapor), 123
- sifón, 153
- sobrecalentado (vapor), 123
- Stirling, James**, 131
- temperatura absoluta**, 125
- temperatura absoluta del gas, 137
- temperatura crítica, 123, 145, 146
- temperatura crítica (agua), 154
- temperatura y rozamiento, 103
- tensor (presión en sólidos)**, 116
- teorema general de la hidrostática, 116, 120
- teoría cinética de los gases**, 125
- termodinámica (probabilidad), 131
- termómetros absolutos, 123
- Torricelli, Evangelista**, 148
- torsión, 114
- torsión (ejemplo), 114
- trabajo de rozamiento**, 103
- trabajos virtuales (principio), 99
- transmisión de calor (rozamiento)**, 104
- urna con bolillas, 129
- vacuómetros, 151
- válvulas (compresores), 149
- Van der Waals**, 145
- Van der Waals (cohesión), 153
- vapor, 123
- vasos comunicantes, 118
- vector espacial (momento)**, 95
- velocidad más frecuente**, 135
- velocidad media**, 136
- velocidad media cuadrática**, 126, 135
- velocidades (distribución de), 125
- velocidades estadísticas y temperatura, 137
- viga, 98

viga (ejemplo), 112, 113
viga horizontal, 105
vínculo, 96
vínculos, 96
viscosidad (fluídos), 115

visión microscópica (rozamiento),
100
volatilidad, 153
Wien, Wilhelm, 142
Zartman, 127
zona de proporcionalidad, 108